Mục lục

Chương 1

DÃY SỐ

1.1 Dãy số

1.1.1 Định nghĩa dãy số

Định nghĩa 1.1. *Dãy số hữu hạn là tập hợp các giá trị của hàm số* $u:\{1,2,3,\ldots,m\}\to\mathbb{R}$, $n\to u(n)$ *được sắp xếp theo thứ tự tăng dần theo đối số n:*

$$u_1,u_2,\ldots,u_m.$$

Ta nói dãy số có m số hạng và

- u_1*: được gọi là số hạng đầu*
- u_m*: được gọi là số hạng cuối.*

Định nghĩa 1.2. *Dãy số là tập hợp các giá trị của hàm số* $u:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$, $n\to u(n)$ *Được sắp xếp theo thứ tự tăng dần liên tiếp theo đối số tự nhiên n:*

$$u(1),u(2),u(3),...,u(n),...$$

- *Ta kí hiệu* $u(n)$ *bởi* u_n *và gọi là **số hạng thứ** n hay **số hạng tổng quát** của dãy số,* u_1 *được gọi là số hạng đầu của dãy số.*
- *Ta có thể viết dãy số dưới dạng khai triển* $u_1,u_2,...,u_n,...$ *hoặc dạng rút gọn* (u_n).

1.1.2 Cách cho dãy số

Người ta thường cho dãy số theo các cách sau:

- Cho số hạng tổng quát, tức là: cho hàm số u xác định dãy số đó
- Cho bằng công thức truy hồi, tức là:

  * Cho một vài số hạng đầu của dãy

  * Cho hệ thức biểu thị số hạng tổng quát qua số hạng (hoặc một vài số hạng) đứng trước nó.

Ví dụ 1.1

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \dfrac{n+1}{2^n}$ với $n \geqslant 1$.

1. Viết 5 số hạng đầu tiên của dãy
2. Chứng minh rằng $u_n \leqslant 1, \quad \forall n \geqslant 1$.

Lời giải. 1) Ta có

$$u_1 = \frac{1+1}{2^1} = 1,\ u_2 = \frac{2+1}{2^2} = \frac{3}{4},\ u_3 = \frac{3+1}{2^3} = \frac{1}{2},\ u_4 = \frac{4+1}{2^4} = \frac{5}{16}, u_5 = \frac{5+1}{2^5} = \frac{3}{16}.$$

2) Ta có $u_n \leqslant 1 \Leftrightarrow 2^n \geqslant n+1$ (1).
Ta chứng minh (1) bằng phương pháp quy nạp.
Với $n = 1$ ta thấy (1) đúng.
Giả sử (1) đúng với $n = k \geqslant 1$, tức là $2^k > k+1$. Khi đó

$$2^{k+1} = 2.2^k \geqslant 2(k+1) = k+2+k > k+2.$$

Do đó (1) đúng với $n = k+1$.
Vậy bài toán được chứng minh. ■

Ví dụ 1.2

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2},\ \forall n \geqslant 1 \end{cases}.$$

1. Tìm 4 số hạng đầu của dãy
2. Chứng minh rằng $u_n > 1$ với $\forall n \geqslant 1$
3. Tìm công thức tổng quát của dãy (u_n).

Lời giải. 1) Ta có

$$u_1 = 2,\ u_2 = \frac{u_1+1}{2} = \frac{3}{2},\ u_3 = \frac{u_2+1}{2} = \frac{5}{4},\ u_4 = \frac{u_3+1}{2} = \frac{9}{8}.$$

2) Ta chứng minh $u_n > 1$ bằng quy nạp.
Hiển nhiên, ta có $u_1 > 1$.
Giả sử $u_n > 1$, khi đó

$$u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1.$$

Do đó, ta có $u_n > 1,\ \forall n \geqslant 1$.
3) Ta có

$$u_1 = 2,\ u_2 = \frac{2^1+1}{2},\ u_3 = \frac{2^2+1}{2^2},\ u_4 = \frac{2^3+1}{2^3}.$$

Do đó, ta chứng minh

$$u_n = \frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}.$$

Giả sử $u_n = \frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$, ta có

$$u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2} = \frac{\frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}+1}{2} = \frac{2^n+1}{2^n}.$$

Theo nguyên lí quy nạp, ta suy ra $u_n = \frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$. ■

Ví dụ 1.3

Chứng minh rằng tồn tại đúng 4 dãy số nguyên dương (u_n) thỏa: $u_0 = 1, u_1 = 2$ và

$$\left|u_{n+2}.u_n - u_{n+1}^2\right| = 1.$$

Lời giải. Ta có:

$$|u_2 - 4| = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u_2 = 5 \Rightarrow u_3 = 12, u_3 = 13 \\ u_2 = 3 \Rightarrow u_3 = 4, u_3 = 5 \end{array}\right..$$

a) Ta chứng minh tồn tại duy nhất dãy số nguyên dương (u_n) thỏa

$$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 3, u_3 = 5$$

và

$$\left|u_{n+2}.u_n - u_{n+1}^2\right| = 1,\ \forall n \geqslant 4. \qquad (1)$$

• Chứng minh tồn tại: Xét dãy $(v_n) : \begin{cases} v_0 = 1, v_1 = 2 \\ v_{n+1} = v_n + v_{n-1},\ n = 2, 3, \ldots \end{cases}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được (v_n) thỏa mãn (1).

Thật vậy:

$$\begin{aligned} \left|v_{n+2}.v_n - v_{n+1}^2\right| &= \left|v_n\left(v_{n+1}+v_n\right) - v_{n+1}^2\right| \\ &= \left|v_{n+1}\left(v_n - v_{n+1}\right) + v_n^2\right| \\ &= \left|v_n^2 - v_{n-1}v_{n+1}\right| = 1 \end{aligned}$$

• Chứng minh duy nhất.

Trước hết ta chứng minh nếu dãy (u_n) thỏa (1) thì (u_n) là dãy tăng.

Giả sử $a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_{n+1} - 1 \geqslant a_n$.

Từ $\left|a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2\right| = 1$ ta suy ra

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 \pm 1}{a_n} \geqslant \frac{a_{n+1}^2 \pm 1}{a_{n+1}-1} > a_{n+1} + 1 > a_{n+1}.$$

Nên theo quy nạp ta có đpcm.

Giả sử tồn tại k để $v_k \neq u_k$ và $v_n = u_n,\ \forall n < k$. Khi đó, ta giả sử $v_k < u_k$, suy ra:

$$\begin{cases} u_k.u_{k-2} = u_{k-1}^2 + 1 \\ v_k.v_{k-2} = v_{k-1}^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow u_{k-2}\left(u_k - v_k\right) = 2 \Rightarrow 2 \vdots u_{k-2} \text{ (vô lí)}.$$

Do vậy tồn tại duy nhất dãy nguyên dương (u_n) (đó chính là dãy (v_n)) thỏa mãn (1).
b) Tương tự ta chứng minh được tồn tại dũy nhất các dãy nguyên dương thỏa:

$$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 3, u_3 = 4, \left|u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2\right| = 1$$
$$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 5, u_3 = 12, \left|u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2\right| = 1$$
$$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 5, u_3 = 13, \left|u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2\right| = 1.$$

Đó là các dãy tương ứng là:

$$u_0 = 1, u_1 = 2, u_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n$$
$$u_0 = 1, u_1 = 2, u_{n+1} = 2u_{n+1} + u_n$$
$$u_0 = 1, u_1 = 2, u_{n+1} = 3u_{n+1} - u_n.$$

Vậy tồn tại đúng 4 dãy số nguyên dương thỏa yêu cầu bài toán. ■

1.1.3 Dãy số tăng, giảm và dãy số bị chặn

Định nghĩa 1.3. *Dãy số* (u_n)

- *Được gọi là **dãy tăng** nếu* $u_n \leqslant u_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}*$
- *Được gọi là **dãy giảm** nếu* $u_n \geqslant u_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}*$
- *Được gọi là **bị chặn dưới** nếu tồn tại số thực m sao cho* $u_n \geqslant m$, $\forall n = 1, 2, \ldots$
- *Được gọi là **bị chặn trên** nếu tồn tại số thực M sao cho* $u_n \leqslant M$, $\forall n = 1, 2, \ldots$
- *Được gọi là **bị chặn** nếu vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới. Tức là tồn tại số thực N sao cho* $|u_n| \leqslant N$, $\forall n = 1, 2, \ldots$.
- *Được gọi là dãy **tuần hoàn** nếu tồn tại số nguyên dương k sao cho* $a_{n+k} = a_n$ *với mọi n, số nguyên dương k nhỏ nhất thỏa điều kiện đó được gọi là **chu kì**. Khi* $k = 1$ *ta gọi là dãy hằng.*

Ví dụ 1.4

Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, \forall n \geqslant 2 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn.

Lời giải. Ta chứng minh dãy (u_n) là dãy tăng bằng phương pháp quy nạp.
* Dễ thấy $u_1 < u_2 < u_3$.
* Giả sử $u_{k-1} < u_k$, $\forall k \leqslant n$, ta chứng minh $u_{n+1} < u_n$.
Thật vậy

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} > \sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_{n-2}} = u_n.$$

Vậy (u_n) là dãy tăng.
Trước hết ta có $u_n > 0$, $\forall n$. Bây giờ ta chứng minh $u_n < 4$, $\forall n$

Thật vậy, ta có $u_1 = 1 < 4$.
Giả sử $u_k < 4,\ \forall k \leqslant n$, ta có

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} < \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4.$$

Do đó, ta luôn có $0 < u_n < 4,\ \forall n$.
Vậy dãy (u_n) là dãy bị chặn. ■

Ví dụ 1.5

Cho dãy (u_n) được xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n(u_n^2+3)}{3u_n^2+1} \end{cases}.$$

Tùy thuộc vào giá trị của u_1, hãy xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy (u_n).

Lời giải. Trước hết ta có $u_n > 0,\ \forall n$.
Ta xét $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - 2\dfrac{u_n^2-1}{3u_n^2+1}$. Từ đây ta suy ra được
• Nếu $u_1 = 1 \Rightarrow u_n = 1,\ \forall n$.
• Nếu $u_1 > 1 \Rightarrow u_{n+1} < u_n\ \forall n \Rightarrow u_n < u_1,\ \forall n$.
• Nếu $u_1 < 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n\ \forall n$ và

$$u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n-1)^3}{3u_n^2+1} \Rightarrow u_n < 1,\ \forall n.$$

Vậy

- Nếu $u_1 = 1$ thì dãy (u_n) là dãy không đổi
- Nếu $u_1 > 1$ thì dãy (u_n) là dãy giảm và bị chặn
- Nếu $u_1 < 1$ thì dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn.

■

Ví dụ 1.6

Chứng minh rằng dãy (u_n) là dãy tuần hoàn với chu kì 2 khi và chỉ khi

$$u_n = \frac{1}{2}\left[u_0 + u_1 + (u_0 - u_1)(-1)^{n+1}\right].$$

Lời giải. • Giả sử $u_n = \dfrac{1}{2}\left[u_0 + u_1 + (u_0 - u_1)(-1)^{n+1}\right]$. Khi đó

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}\left[u_0 + u_1 - (u_0 - u_1)(-1)^{n+1}\right] \\ u_{n+2} &= \frac{1}{2}\left[u_0 + u_1 + (u_0 - u_1)(-1)^{n+3}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[u_0 + u_1 + (u_0 - u_1)(-1)^{n+1}\right] = u_n. \end{aligned}$$

Suy ra dãy (u_n) là dãy tuần hoàn chu kỳ 2.
• Giả sử dãy (u_n) tuần hoàn chu kỳ 2. Khi đó $u_{n+2} = u_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$u_n = \frac{1}{2}\left[u_0 + u_1 + (u_0 - u_1)(-1)^{n+1}\right].$$

Vậy bài toán được chứng minh. ■

Ví dụ 1.7

Cho dãy số nguyên $\{a_n\}$ truy hồi cấp k (k là số nguyên dương) nghĩa là

$$a_{n+k} = f(a_n, a_{n+1}, ..., a_{n+k-1}) \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nếu dãy bị chặn thì nó là dãy tuần hoàn kể từ lúc nào đó.

Lời giải. Giả sử dãy bị chặn bởi số nguyên dương M, nghĩa là $|a_n| \leqslant M$.
Xét các bộ k số

$$(a_0, a_1, ..., a_{k-1}),\ (a_1, a_2, ..., a_k),\ (a_2, a_3, ..., a_{k+1}),\ ....$$

Có tối đa $(2M+1)^k$ bộ khác nhau nên trong $(2M+1)^k + 1$ bộ đầu tiên phải có hai bộ trùng nhau. Chẳng hạn

$$(a_i, a_{i+1}, ..., a_{i+k-1}) = \left(a_j, a_{j+1}, ..., a_{j+k-1}\right) \text{ với } i > j.$$

Tức là : $a_{i+t} = a_{j+t} \ \forall t = 0, 1, ..., k-1$. Suy ra

$$a_{i+k} = f(a_i, a_{i+1}, ..., a_{i+k-1}) = f\left(a_j, a_{j+1}, ..., a_{j+k-1}\right) = a_{j+k}.$$

Đặt $T = i - j$ thì ta có

$$a_{n+T} = a_n \ \forall n \geqslant j + k = n_0.$$

Vậy dãy (a_n) tuần hoàn với chu kì $T = i - j$ kể từ số hạng $n_0 = j + k$. ■

Ví dụ 1.8

Cho dãy số nguyên $\{a_n\}$ thoả mãn

$$a_n = c_1 a_{n+1} + c_2 a_{n+2} + ... + c_k a_{n+k},$$

trong đó $c_1, c_2, ..., c_k$ là các số nguyên và $m > 1$ là số nguyên dương. Gọi r_n là số dư trong phép chia a_n cho m. Khi đó dãy $\{r_n\}$ tuần hoàn.

Lời giải. Theo giả thiết ta có $a_n \equiv r_n \pmod{m}$. Theo tính chất của đồng dư thức ta có

$$r_n \equiv c_1 r_{n+1} + c_2 r_{n+2} + ... + c_k r_{n+k} \pmod{m}.$$

Theo các xác định r_n ta có $0 \leqslant r_n \leqslant m-1$ tức là dãy $\{r_n\}$ bị chặn và truy hồi tuyến tính cấp k nên theo định lý trên dãy tuần hoàn kể từ lúc nào đó, nghĩa là $\exists n_0,\ T \geqslant 1$ sao cho $r_{n+T} = r_n,\ \forall n \geqslant n_0$. Khi đó

$$\begin{aligned} r_{n_0+T-1} &\equiv c_1 r_{n_0+T} + c_2 r_{n_0+T+1} + \dots + c_k r_{n_0+T+k-1} \\ &\equiv c_1 r_{n_0} + c_2 r_{n_0+1} + \dots + c_k r_{n_0+k-1} \\ &\equiv r_{n_0-1} \pmod m \end{aligned}$$

Suy ra $r_{n_0+T-1} = r_{n_0-1}$.
Tương tự, ta cũng có

$$r_{n_0-2} = r_{n_0-2+T}, \dots,\ r_1 = r_{1+T},\ r_0 = r_T.$$

Do đó dãy $\{r_n\}$ tuần hoàn với chu kì T. ■

1.2 Cấp số cộng - Cấp số nhân

1.2.1 Cấp số cộng

1.2.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.4. *Dãy số (u_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + d \end{cases},\quad n \in N^*.$$

*gọi là **cấp số cộng**; d gọi là **công sai**.*

1.2.1.2 Tính chất

Định lí 1.1. *Cho cấp số cộng (u_n) với công sai d. Khi đó*

$$u_n = u_1 + (n-1)d. \tag{1}$$

Chứng minh. Ta chứng minh (1) bằng phương pháp quy nạp.
Dễ thấy (1) đúng với $n = 1$. Giả sử $u_n = u_1 + (n-1)d$, khi đó

$$u_{n+1} = u_n + d = u_1 + (n-1)d + d = u_1 + nd.$$

Vậy (1) đúng. □

Định lí 1.2. *Cho cấp số cộng (u_n). Khi đó*

$$2u_k = u_{k-1} + u_{k+1} \quad \forall k = 2,3,\dots$$

Chứng minh. Ta có $u_k = u_{k-1} + d$, $u_{k+1} = u_k + d$ nên $u_k = u_{k+1} - d$. Suy ra

$$2u_k = u_k + u_k = u_{k-1} + d + u_{k+1} - d = u_{k+1} + u_{k-1}.$$

□

Chú ý 1. *Từ định lí trên ta có:*
Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành CSC khi và chỉ khi $a+c=2b$.

Định nghĩa 1.5. *Cho CSC (u_n), đặt*

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Khi đó S_n được gọi là tổng của n số hạng đầu của CSC.

Định lí 1.3. *Cho CSC (u_n) có công sai d. Khi đó*

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1+u_n) = \frac{n}{2}(2u_1+(n-1)d) = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Ví dụ 1.9

Chứng minh rằng dãy (u_n) là cấp số cộng khi và chỉ khi $u_n = an+b$.

Lời giải. • Giả sử (u_n) là cấp số cộng, khi đó

$$u_n = u_1 + (n-1)d = dn + u_1 - d = an + b.$$

• Giả sử $u_n = an+b$, ta có:

$$u_n - u_{n-1} = an + b - a(n-1) - b = a$$

Vậy (u_n) là CSC với công sai $d = a$. ■

Ví dụ 1.10

Cho $a,b,c>0$ lập thành cấp sô cộng.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}.$$

Lời giải. Gọi d là công sai của cấp số, suy ra $b-a=c-b=d, c-a=2d$ Do đó:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} &= \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{d} + \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{d} \\ &= \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{d} \\ &= \frac{c-a}{d(\sqrt{c}+\sqrt{a})} \\ &= \frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

■

Ví dụ 1.11

Chứng minh ba số $a,b,c>0$ là 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng khi và chỉ khi 3 số $a^2+ab+b^2;c^2+ca+a^2;b^2+bc+c^2$ cũng là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

Lời giải. Ta có $a^2+ab+b^2;\ c^2+ca+a^2;\ b^2+bc+c^2$ lập thành CSC khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}&a^2+ab+b^2+b^2+bc+c^2=2(a^2+ca+c^2)\\&\Leftrightarrow 2b^2+ab+bc=a^2+2ac+c^2\\&\Leftrightarrow b(a+b+c)+b^2-(a+c)^2=0\\&\Leftrightarrow b(a+b+c)+(a+b+c)(b-a-c)=0\\&\Leftrightarrow 2b-a-c=0\Leftrightarrow 2b=a+c.\end{aligned}$$

Hay a, b, c lập thành CSC. ■

Ví dụ 1.12

Cho bốn số thực $a_1;a_2;a_3;a_4$.Biết rằng :

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}=\dfrac{2}{a_1a_3}\\ \dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\dfrac{1}{a_3a_4}=\dfrac{3}{a_1a_4}\end{cases}.$$

Chứng minh rằng : $a_1;a_2;a_3;a_4$ lập thành cấp số cộng.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{2}{a_1a_3}\Leftrightarrow a_3+a_1=2a_2\\&\Rightarrow a_1-a_2=a_2-a_3=d\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}=\frac{3}{a_1a_4}\\&\Leftrightarrow\frac{2}{a_1a_3}+\frac{1}{a_3a_4}=\frac{3}{a_1a_4}\\&\Leftrightarrow 2a_4+a_1=3a_3\\&\Leftrightarrow 2a_4=3(a_1+2d)-a_1\Rightarrow a_4=a_1+3d\end{aligned}.$$

■

Ví dụ 1.13

Gọi $S_1;S_2;S_3$ là tổng $n_1;n_2;n_3$ số hạng đầu của một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2-n_3)+\frac{S_2}{n_2}(n_3-n_1)+\frac{S_3}{n_3}(n_1-n_2)=0.$$

Lời giải. Thay công thức

$$S_1 = n_1u_1 + \frac{n_1(n_1-1)}{2}d,\ S_2 = n_2u_1 + \frac{n_2(n_2-1)}{2}d;\ S_3 = n_3u_1 + \frac{n_3(n_3-1)}{2}d.$$

Nên

$$\frac{S_1}{n_1} = u_1 + \frac{n_1-1}{2}d,\ \frac{S_2}{n_2} = u_1 + \frac{n_2-1}{2}d,\ \frac{S_3}{n_3} = u_1 + \frac{n_3-1}{2}d.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&\frac{S_1}{n_1}(n_2-n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3-n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1-n_2)\\ &= \frac{d}{2}[(n_1-1)(n_2-n_3)+(n_2-1)(n_3-n_1)+(n_3-1)(n_1-n_2)] = 0.\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 1.14

(VMO 2012) Cho các cấp số cộng (a_n), (b_n) và số nguyên $m > 2$. Xét m tam thức bậc hai:

$$P_k(x) = x^2 + a_kx + b_k,\ k = 1,2,3,....,m.$$

Chứng minh rằng nếu hai tam thức $P_1(x)$, $P_m(x)$ đều không có nghiệm thực thì tất cả các đa thức còn lại cũng không có nghiệm thực.

Lời giải. Gọi a, b là các công sai của hai cấp số cộng (a_n) và (b_n). Giả sử $P_k(x)$ có nghiệm $x = c$ với $1 < k < m$ nào đó. Theo tính chất cấp số cộng ta có:

$$P_m(x) - P_k(x) = (m-k)(ax+b) \text{ và } P_k(x) - P_1(x) = (k-1)(ax+b).$$

Suy ra

$$P_m(c) = (m-k)(ac+b) \text{ và } P_1(c) = -(k-1)(ac+b)$$

nên $P_m(c).P_1(c) < 0$ (*).
Nhưng $P_m(c) > 0$ và $P_1(c) > 0$ nên điều suy ra ở trên là vô lí.
Vậy tất cả các đa thức $P_k(x)$, $k = 2,3,...,m-1$ đều vô nghiệm. ■

Ví dụ 1.15

(APMO 2014) Cho $2k$ số thực $a_1, a_2, ..., a_k, b_1, b_2, ..., b_k$. Xác định dãy số (X_n) như sau

$$X_n = \sum_{i=1}^{k}[a_in + b_i],\ n = 1,2,...$$

Chứng minh rằng nếu (X_n) là một cấp số cộng thì $\sum_{i=1}^{k} a_i$ là số nguyên.

Lời giải. Đặt

$$A = \sum_{i=1}^{k} a_k, B = \sum_{i=1}^{k} b_k.$$

Ta có

$$a_i n + b_i - 1 \leqslant [a_i n + b_i] < a_i n + b_i.$$

Suy ra $An + B - k \leqslant X_n < An + B$.
Giả sử $\{X_n\}$ là cấp số cộng với công sai d, khi đó $nd = X_{n+1} - X_1$ và $A + B - k \leqslant X_1 < A + B$
Vì $X_{n+1} = X_1 + nd$ nên ta có :

$$A(n+1) + B - k < X_1 + nd < A(n+1) + B \Leftrightarrow An + A + B - k - X_1 < nd < An + A + B - X_1.$$

Mà $A + B - X_1 > 0$ và $A + B - X_1 < k$ nên $An - k < nd < An + k$. Suy ra $|A - d| < \frac{k}{n}$.
Cho n tiến ra vô cùng, ta có $|A - d| = 0 \Rightarrow A = d$.
Mặt khác $\{X_n\}$ là dãy số nguyên nên $A = d = X_{n+1} - X_n$ là số nguyên (đpcm). ■

1.2.2 Cấp số nhân

1.2.2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.6. *Dãy số (u_n) được xác định bởi*

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n.q \end{cases}, \; n \in N^*$$

*gọi là **cấp số nhân**; q gọi là **công bội**.*

1.2.2.2 Tính chất

Định lí 1.4. *Cho cấp số nhân (u_n) với công bội q. Khi đó*

$$u_n = u_1 q^{n-1}. \tag{2}$$

Chứng minh. Ta chứng minh (2) bằng phương pháp quy nạp.
Dễ thấy (2) đúng với $n = 1$. Giả sử $u_n = u_1.q^{n-1}$, khi đó

$$u_{n+1} = u_n.q = u_1 q^n.$$

Vậy (2) đúng. □

Định lí 1.5. *Cho cấp số cộng (u_n). Khi đó*

$$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1} \quad \forall k = 2, 3, \ldots$$

Chứng minh. Ta có $u_{k+1} = u_k q$, $u_k = u_{k-1} q$ nên $u_{k-1} = \frac{u_k}{q}$. Suy ra

$$u_{k-1}.u_{k+1} = \frac{u_k}{q}.u_k.q = u_k^2.$$

□

Chú ý 2. *Từ định lí trên ta có:*
Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành CSN khi và chỉ khi $a.c = b^2$.

Định nghĩa 1.7. *Cho CSN (u_n), đặt*

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Khi đó S_n được gọi là tổng của n số hạng đầu của CSN.

Định lí 1.6. *Cho CSC (u_n) có công bội q. Khi đó*

$$S_n = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ví dụ 1.16

Chứng minh rằng dãy (u_n) là CSN khi và chỉ khi $u_n = a.\alpha^n$.

Lời giải. • Nếu dãy (u_n) là CSN thì ta có: $u_n = u_1.q^{n-1} = a.\alpha^n$ với $a = \frac{u_1}{q}, \alpha = q$.
• Nếu $u_n = a.\alpha^n$ thì ta có:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha \Rightarrow u_{n+1} = \alpha.u_n.$$

Vậy dãy (u_n) là CSN với công bội $q = \alpha$. ■

Ví dụ 1.17

Chứng minh rằng: điều cần và đủ để ba số khác không a, b, c là ba số hạng của một CSN là tồn tại ba số nguyên khác không p, t, r sao cho

$$\begin{cases} p + t + r = 0 \\ a^p.b^t.c^r = 1 \end{cases}.$$

Lời giải. • Giải sử a, b, c là ba số hạng thứ $k+1$; $l+1$; $m+1$ của cấp số nhân có công bội q, khi đó ta có :

$$a = u_1.q^k; b = u_1.q^l; c = u_1.q^m \Rightarrow \frac{a}{b} = q^{k-l}; \frac{b}{c} = q^{l-m}$$

Suy ra

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{l-m} = \left(\frac{b}{c}\right)^{k-l} \Rightarrow a^{l-m}.b^{m-l-k+1}.c^{k-1} = 1.$$

Đặt $p = l - m; t = m - l - k + 1; r = k - 1$. Khi đó ta có ba số p, t, r thỏa mãn yêu cầu bài toán.
• Giả sử ta có

$$\begin{cases} p + t + r = 0 \\ a^p.b^t.c^r = 1 \end{cases} \Rightarrow a^p.c^r = b^{p+r} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^p = \left(\frac{b}{c}\right)^r \quad (*)$$

Do $p + t + r = 0$ nên tồn tại ít nhất một số dương và một số âm.
Giải sử $r > 0, t < 0$. Đặt $\frac{b}{a} = q^r \Rightarrow b = a.q^r$ kết hợp với (*) ta có

$$\left(\frac{a}{a.q^r}\right)^p = \left(\frac{a.q^r}{c}\right)^r \Rightarrow c = a.q^{r+p}.$$

Vậy ba số a, b, c là ba số hạng của cấp số nhân với a là số hạng đầu, b là số hạng thứ $r+1$; c là số hạng thứ $r+p+1$. ■

Ví dụ 1.18

Chứng minh rằng nếu ba cạnh của tam giác lập thành CSN thì công bội của CSN đó nằm trong khoảng $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Lời giải. Giả sử a, b, c là ba cạnh tam giác theo thứ tự đó lập thành CSN với công bội q. Ta có:

$$\begin{cases} a+aq > aq^2 \\ aq^2+aq > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2-q-1<0 \\ q^2+q-1>0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} q \in \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ q \in \left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow q \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right).$$

■

Ví dụ 1.19

Cho (u_n) là cấp số nhân. Kí hiệu

$$S = u_1+u_2+\ldots+u_n;\ T = \frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\ldots+\frac{1}{u_n};\ P = u_1u_2\ldots u_n.$$

Hãy tính P theo S, T và n.

Lời giải. Ta có:

$$S = u_1\frac{q^n-1}{q-1};\ T = \frac{1}{u_1}\frac{\left(\dfrac{1}{q}\right)^n-1}{\dfrac{1}{q}-1} = \frac{1}{u_1}\frac{q^n-1}{q^{n-1}(q-1)}\ P = u_1^n q^{1+2+\ldots+n-1} = u_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Suy ra: $P = \sqrt{\left(\dfrac{S}{T}\right)^n}$ ■

Ví dụ 1.20

Chứng minh rằng các số $2, 3, 5$ không thể cùng thuộc một CSN.

Lời giải. Giả sử 2,3,5 là ba số hạng thứ m,n,p của CSN (v_n) có công bội q Ta có:

$$\frac{2}{3}=\frac{u_m}{u_n}=q^{m-n};\frac{5}{3}=q^{p-n},$$

suy ra

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p-n}=\left(\frac{5}{3}\right)^{m-n}=p^{(p-n)(m-n)}\Rightarrow 2^{p-n}.3^{m-p}.5^{n-m}=1$$

vô lí. ■

1.2.3 Ứng dụng CSC-CSN để tìm CTTQ của dãy số

Chúng ta đã biết công thức xác định công thức tổng quát (CTTQ) của một cấp số cộng (CSC) khi biết số hạng đầu với công sai d và một cấp số nhân (CSN) khi biết số hạng đầu với công bội q. Trong chuyên đề này chúng tôi trình bày với các bạn một số cách xác định CTTQ của một số dãy số có công thức truy hồi dạng đặc biệt. Phương pháp giải quyết là chúng ta đưa vào một số dãy phụ để chuyển dãy đã cho về một CSC hoặc một CSN hoặc những dãy số quen thuộc đã biết.

Ví dụ 1.21

Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi

$$u_1=1,\ u_n=u_{n-1}-2,\ \forall n\geqslant 2.$$

Lời giải. Ta thấy dãy (u_n) là một CSC có công sai $d=-2$. Nên ta có:

$$u_n=1-2(n-1)=-2n+3.$$

■

Ví dụ 1.22

Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi

$$u_1=3,\ u_n=2u_{n-1}\ \forall n\geqslant 2.$$

Lời giải. Ta thấy dãy (u_n) là một CSN có công bội $q=2$.
Ta có: $u_n=3.2^{n-1}$. ■

Ví dụ 1.23

Xác định số hạng tổng quát của dãy (u_n) được xác định bởi:

$$u_1=-2,\ u_n=3u_{n-1}-1\ \forall n\geqslant 2.$$

Lời giải. Trong bài toán này chúng ta sẽ gặp khó khăn vì dãy (u_n) không phải là CSC hay CSN! Ta thấy dãy (u_n) không phải là CSN vì xuất hiện hằng số -1 ở vế trái. Ta tìm cách làm mất -1 đi và chuyển dãy số về CSN.
Để thực hiện ý đồ này ta đặt $u_n = k.v_n + l$; k,l là các hằng số và $k \neq 0$ (ta sẽ chọn k,l sau).
Khi đó, ta có:

$$k.v_n + l = 3k.v_{n-1} + 3l - 1 \Leftrightarrow v_n = 3v_n + \frac{2l-1}{k}.$$

Ta chọn $k,l : \frac{2l-1}{k} = 0 \Leftrightarrow l = \frac{1}{2}$ và k bất kì nên ta chọn $\begin{cases} k = 1 \\ l = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Nên ta có dãy $(v_n) : \begin{cases} v_n = 3v_{n-1} \\ v_1 = -\frac{5}{2} \end{cases}$.

Dễ thấy dãy (v_n) là CSN với công bội $q = 3$ nên

$$v_n = v_1.q^{n-1} = -\frac{5}{2}.3^{n-1}.$$

Suy ra:

$$u_n = v_n + \frac{1}{2} = -\frac{5.3^{n-1}}{2} + \frac{1}{2}.$$

Ta thấy k bất kì, do đó khi đặt ta chọn $k = 1$.

■

Tương tự cách làm này ta có được kết quả tổng quát sau:

Dạng 1: *Dãy số $(u_n) : u_1 = x_0,\ u_n = au_{n-1} + b,\ \forall n \geqslant 2$ ($a,b \neq 0$ là các hằng số) có CTTQ là:*

$$u_n = \begin{cases} u_1 + (n-1)b \text{ khi } a = 1 \\ u_1.a^{n-1} + b\frac{a^{n-1}-1}{a-1} \text{ khi } a \neq 1 \end{cases}.$$

Ví dụ 1.24

Xác định CTTQ của dãy (u_n) được xác định bởi :

$$u_1 = 2;\ u_{n+1} = 2u_n + 3n + 2.$$

Lời giải. Ở ví dụ này chúng ta không thể sử dụng kết quả trên được vì hệ số tự do ở đây không phải là hằng số mà là một hàm bậc nhất biến n.
Tuy nhiên chúng ta có thể bắt chước cách giải ở trên làm mất $3n+2$ ở VP, ta đặt : $u_n = k.v_n + t.n + l$; k,t,l là các hằng số $k \neq 0$.
Khi đó ta có:

$$kv_{n+1} + t(n+1) + l = 2kv_n + 2tn + 2l + 3n + 2.$$

Hay là

$$v_{n+1} = 2v_n + \frac{t+3}{k}.n + \frac{l-t+2}{k}.$$

Ta chọn k,t,l sao cho:

$$\begin{cases}\dfrac{t+3}{k}=0\\ \dfrac{l-t+2}{k}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-3\\ l=-1\\ k\neq 0\end{cases},$$

ta chọn $k=1$.
Nên ta có dãy

$$(v_n):\begin{cases}v_1=6\\ v_n=2v_{n-1}\end{cases}\Rightarrow v_n=6.2^{n-1}=3.2^n.$$

Vậy $u_n=v_n-3n-1=3.2^n-3n-1$.
Ta thấy trong cách giải trên không phụ thuộc vào k, nên khi đặt ta có thể chọn $k=1$. ■

Ví dụ 1.25

Cho dãy số $(u_n):\begin{cases}u_1=2\\ u_n=u_{n-1}+2n+1\end{cases}$. Tìm CTTQ của dãy (u_n).

Lời giải. Với bài toán này nếu ta thực hiện cách làm như trên sẽ không dẫn đến kết quả, vì sau khi đặt ta có :

$$v_{n+1}=v_n+\frac{2}{k}.n+\frac{1-t}{k},$$

dẫn đến ta không thể làm mất n được.
Ta sẽ đi tìm lời giải khác cho bài toán trên. Ta viết công thức truy hồi của dãy đã cho dưới dạng sau $u_n-u_{n-1}=2n+1$. Từ đây ta có:

$$\begin{aligned}u_n&=(u_n-u_{n-1})+(u_{n-1}-u_{n-2})+...+(u_2-u_1)+u_1\\&=2n+1+2(n-1)+1+...+2.2+1+2\\&=2(n+n-1+...+2+1)+n-1\\&=2\frac{n(n+1)}{2}+n-1=n^2+2n-1.\end{aligned}$$

Từ kết quả chúng ta tìm được, ta thấy được nguyên nhân mà cách làm ban đầu không cho ta kết quả là CTTQ của dãy số là một đa thức bậc hai theo n, mà với cách đặt ban đầu thì ta thấy là trong CTTQ của dãy là một đa thức bậc nhất. Từ phân tích này ta có thể giải bài toán trên theo cách khác như sau:
Đặt $u_n=v_n+an^2+bn+c$. Khi đó, ta có:

$$v_n+an^2+bn+c=v_{n-1}+a(n-1)^2+b(n-1)+c+2n+1.$$

Hay $v_n=v_{n-1}+2(1-a)n+a-b+1$. Ta chọn

$$\begin{cases}1-a=0\\ a-b+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases},$$

c bất kì nên ta chọn $c=0$.
Khi đó:

$$(v_n):\begin{cases}v_1=-1\\ v_n=v_{n-1}\end{cases}\Rightarrow v_n=v_{n-1}=v_{n-2}=...=v_1=-1.$$

Vậy $u_n = v_n + n^2 + 2n = n^2 + 2n - 1$.
Vì c bất kì nên ta chỉ cần đặt $u_n = v_n + an^2 + bn = v_n + n(an + b)$. ■

Dạng 2: *Từ ví dụ 4 và cách giải thứ hai của ví dụ 5 ta rút ra được cách tìm CTTQ của dãy (u_n) được xác định bởi:*

$$\begin{cases} u_1 = x_0 \\ u_n = a.u_{n-1} + f(n) \end{cases},$$

trong đó $f(n)$ là một đa thức bậc k theo n; a là hằng số. Ta làm như sau:
• Nếu $a = 1$, ta đặt $u_n = v_n + n.g(n)$ với $g(n)$ là một đa thức theo n bậc k, thay vào công thức truy hồi của dãy rồi ta chọn $g(n)$ thỏa:

$$ng(n) - (n-1)g(n-1) = f(n)$$

ta có được dãy (v_n) là CSN với công bội $q = 1$ từ đó ta tìm được CTTQ của dãy (v_n) suy ra ta có CTTQ của dãy (u_n).
• Nếu $a \neq 1$, ta đặt $u_n = v_n + h(n)$ với $h(n)$ là một đa thức theo n bậc k. Thay vào công thức truy hồi của dãy rồi ta chọn $h(n)$ thỏa:

$$h(n) - ah(n-1) = f(n)$$

ta có được dãy (v_n) là CSN với công bội $q = a$ từ đó ta tìm được CTTQ của dãy (v_n). Suy ra ta có CTTQ của dãy (u_n).

Ví dụ 1.26

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1} + 2^n \ ; n = 2, 3, \dots \end{cases}.$$

Tìm CTTQ của dãy (u_n).

Lời giải. Với cách giải tương tự như các ví dụ trên ta đặt: $u_n = v_n + a.2^n$.
Ta có:

$$v_n + a.2^n = 3(v_{n-1} + a.2^{n-1}) + 2^n \Leftrightarrow v_n = 3v_{n-1} + 2^n(a+2).$$

Ta chọn $a = -2 \Rightarrow v_n = 3v_{n-1} = v_1.3^{n-1} = 5.3^{n-1}$.
Vậy $u_n = 5.3^{n-1} - 2^{n+1}$. ■

Chú ý 3. *Trong trường hợp tổng quát dãy*

$$(u_n) : u_n = a.u_{n-1} + b.\alpha^n,$$

ta đặt $u_n = x_n + y.\alpha^n$. Khi đó , ta có:

$$x_n + y.\alpha^n = a.x_{n-1} + ay.\alpha^{n-1} + b.\alpha^n.$$

Suy ra

$$x_n = a.x_{n-1} + [y(a-\alpha) + b\alpha]\alpha^{n-1}.$$

Do đó, nếu $a \neq \alpha$, ta chọn

$$y = \frac{b\alpha}{\alpha - a} \Rightarrow x_n = a.x_{n-1} \Rightarrow x_n = x_1.a^{n-1}.$$

Suy ra:

$$u_n = (u_1 - \frac{b\alpha^2}{\alpha - a})a^{n-1} + \frac{b\alpha}{\alpha - a}.\alpha^n.$$

Trường hợp $\alpha = a \Rightarrow u_n - a.u_{n-1} = b.a^n$ nên ta có:

$$u_n = (u_n - a.u_{n-1}) + a(u_{n-1} - u_{n-2}) + \ldots + a^{n-2}(u_2 - au_1) + u_1.a^{n-1}.$$

Suy ra $u_n = b(n-1)a^n + u_1a^{n-1}$. Vậy ta có kết quả sau.

Dạng 3: *Cho dãy (u_n) được xác định bởi:*

$$\begin{cases} u_1 = p \\ u_n = a.u_{n-1} + b.\alpha^n \ \forall n \geqslant 2 \end{cases}.$$

Khi đó ta có:

- *Nếu $a = \alpha$ thì*

$$u_n = [ab(n-1) + u_1]a^{n-1}.$$

- *Nếu $a \neq \alpha$ thì*

$$u_n = (u_1 - \frac{b\alpha^2}{\alpha - a})a^{n-1} + \frac{b\alpha}{\alpha - a}.\alpha^n.$$

Chú ý 4. *Trong trường hợp $a = \alpha$ ta có thể tìm CTTQ của dãy (u_n) như sau:*
Đặt $u_n = x_n + y.n.a^n$. Khi đó ta có:

$$x_n + y.n.a^n = a.x_{n-1} + ay(n-1).a^{n-1} + b.a^n \Rightarrow x_n = a.x_{n-1} + (-y+b).a^n$$

nên ta chọn $y = b$. Suy ra

$$x_n = x_1.a^{n-1} \Rightarrow u_n = (u_1 - ab)a^{n-1} + bn.a^n = [ab(n-1) + u_1]a^{n-1}.$$

Ví dụ 1.27

Tìm CTTQ của dãy:

$$(u_n): \begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 5u_{n-1} + 2.3^n - 6.7^n + 12 \ ; \ n = 2, 3, \ldots \end{cases}.$$

Lời giải. Đặt $u_n = v_n + a.3^n + b.7^n + c$. Khi đó , ta có:

$$v_n + a.3^n + b.7^n + c = 5(v_{n-1} + a.3^{n-1} + b.7^{n-1} + c) + 2.3^n - 6.7^n + 12$$
$$\Leftrightarrow v_n = 5v_{n-1} + 3^{n-1}(2a+6) - 7^{n-1}(2b+42) + 4c + 12.$$

Ta chọn a,b,c sao cho :

$$\begin{cases} 2a+6=0 \\ 2b+42=0 \\ 4c+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-21 \\ c=-3 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$v_n = 5v_{n-1} \Rightarrow v_n = v_1.5^{n-1} = 157.5^{n-1}.$$

Vậy $u_n = v_n - 3^{n+1} - 3.7^{n+1} - 3 = 157.5^{n-1} - 3^{n+1} - 3.7^{n+1} - 3.$ ■

Qua ví dụ trên ta có kết quả sau:

Dạng 4: *Để tìm CTTQ của dãy số*

$$(u_n): \begin{cases} u_1 = p \\ u_n = a.u_{n-1} + b.\alpha^n + c.\beta^n + d;\ \forall n \geqslant 2 \end{cases},$$

(trong đó $a,b,c \neq 0; \alpha,\beta \neq 1; \alpha.\beta \neq a$) ta làm như sau:

• Nếu $a=1$ thì $u_n - u_{n-1} = b.\alpha^n + c.\beta^n + d$. Suy ra

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + \sum_{i=0}^{n-2}(u_{n-i} - u_{n-i-1}) \\ &= u_1 + \sum_{i=0}^{n-2}(b.\alpha^{n-i} + c.\beta^{n-i} + d) \\ &= u_1 + b\sum_{i=0}^{n-2}\alpha^{n-i} + c\sum_{i=0}^{n-2}\beta^{n-i} + d.(n-1) \\ \Rightarrow u_n &= u_1 + b.\alpha.\left(\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} - 1\right) + c.\beta.\left(\frac{1-\beta^n}{1-\beta} - 1\right) + d.(n-1). \end{aligned}$$

• Nếu $a \neq 1$, ta đặt

$$u_n = v_n + x.\alpha^n + y.\beta^n + z.$$

Ta có:

$$v_n = a.v_{n-1} + (ax - x\alpha + \alpha b)\alpha^{n-1} + (by - y\beta + \beta c)\beta^{n-1} + z(a-1) + d.$$

Ta chọn :

$$x = \frac{\alpha b}{\alpha - a}; y = \frac{\beta c}{\beta - b}; z = \frac{d}{1-a}.$$

Khi đó: $v_n = a.v_{n-1}$ nên

$$v_n = v_1.a^{n-1} = \left(u_1 - \frac{\alpha^2 b}{\alpha - a} - \frac{\beta^2 c}{\beta - b} - \frac{d}{1-a}\right)a^{n-1}$$

$$u_n = \left(u_1 - \frac{\alpha^2 b}{\alpha - a} - \frac{\beta^2 c}{\beta - b} - \frac{d}{1-a}\right)a^{n-1} + \frac{b}{\alpha - a}\alpha^n + \frac{c}{\beta - b}\beta^n + \frac{d}{1-a}.$$

Chú ý 5. *Nếu $\alpha = a$ hoặc $\beta = a$ thì khi đặt u_n theo v_n thì ta nhân thêm n vào trước α^n hoặc β^n.*

Ví dụ 1.28

Tìm CTTQ của dãy :

$$(u_n):\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3^n - n;\ \forall n \geqslant 2 \end{cases}.$$

Lời giải. Để tìm CTTQ của dãy (u_n) ta làm như sau:
Đặt $u_n = v_n + a.3^n + bn + c$.
Ta có:

$$v_n + a.3^n + bn + c = 2\left(v_{n-1} + a.3^{n-1} + b(n-1) + c\right) + 3^n - n$$
$$\Leftrightarrow v_n = 2v_{n-1} + (-a+1)3^{n-1} + (b-1)n - 2b + c.$$

Ta chọn $a = b = 1; c = 2$. Khi đó:

$$v_n = 2v_{n-1} \Rightarrow v_n = v_1.2^{n-1} = -5.2^{n-1}.$$

Vậy $u_n = -5.2^{n-1} + 3^n + n + 2$. ■

Dạng 5: *Nếu dãy số (u_n) được xác định bởi:*

$$\begin{cases} u_1 = p \\ u_n = a.u_{n-1} + b.\alpha^n + f(n);\ \forall n \geqslant 2 \end{cases},$$

trong đó $f(n)$ là đa thức theo n bậc k ta tìm CTTQ của dãy như sau:
• Nếu $\alpha \neq 1$ ta đặt $u_n = v_n + x.\alpha^n + g(n)$, với $g(n)$ là đa thức theo n bậc k. Ta sẽ chọn sao cho dãy (v_n) là một CSN, khi đó ta sẽ tìm được CTTQ của dãy (v_n) từ đó ta có CTTQ dãy (u_n).
• Nếu $\alpha = 1$ thì ta tìm được u_n theo cách làm đã ở trên.

Ví dụ 1.29

Xác định CTTQ của dãy

$$(u_n): u_0 = -1, u_1 = 3,\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}\ \forall n \geqslant 1.$$

Lời giải. Ta viết công thức truy hồi của dãy lại như sau:

$$u_{n+1} - 2u_n = 3(u_n - 2u_{n-1}). \quad (1)$$

Đặt $v_{n+1} = u_{n+1} - 2u_n$, ta có:

$$\begin{cases} v_1 = 5 \\ v_{n+1} = 3v_n \end{cases} \Rightarrow v_n = 5.3^{n-1} \Rightarrow u_n - 2u_{n-1} = 5.3^{n-1}.$$

Từ đó ta tìm được: $u_n = 5.3^n - 6.2^n$. ■

Trong lời giải trên ta đã phân tích $5 = 2+3$ và $6 = 2.3$ để viết lại công thức truy hồi như (1), từ đó ta đưa vào được dãy phụ (v_n) là một CSN. Các hệ số xuất hiện trong công thức truy hồi là 5;6 nên ta dễ dàng tìm được mối liên hệ, trong trường hợp tổng quát ta có luôn phân tích được các hệ số như vậy hay không ? Nếu được thì phân tích như thế nào ?. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 1.30

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi :

$$\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + u_{n-1} \ \forall n \geqslant 1 \end{cases}.$$

Hãy xác định CTTQ của dãy (u_n).

Lời giải. Gọi x, y là hai số thỏa mãn: $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=-1 \end{cases} \Rightarrow x, y$ là nghiệm PT: $X^2 - 4X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \pm \sqrt{5}$, ta chọn $x = 2+\sqrt{5}; y = 2-\sqrt{5}$. Ta có:

$$u_{n+1} = (x+y)u_n - xyu_{n-1} \Leftrightarrow u_{n+1} - x.u_n = y(u_n - xu_{n-1}).$$

Đặt $v_n = u_n - x.u_{n-1} \Rightarrow v_1 = 2 - x$ và $v_{n+1} = y.v_n$. Suy ra

$$v_n = v_1.y^{n-1} = (2-x)y^{n-1} \Rightarrow u_n - x.u_{n-1} = (2-x)y^{n-1}$$

Từ đó, ta có:

$$u_n = \frac{y-2}{y-x}x^n + \frac{2-x}{y-x}y^n = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n\right].$$

■

Ví dụ 1.31

Cho a, b, c là các số thực khác không và dãy (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_0 = p; \ u_1 = q \\ u_{n+1} = a.u_n + b.u_{n-1} \end{cases}.$$

Hãy xác định CTTQ của dãy (u_n) ?

Lời giải. Ta viết lại công thức truy hồi của dãy đã cho như sau:

$$u_{n+1} - x.u_n = y(u_n - x.u_{n-1}).$$

Ta xác định x, y sao cho: $\begin{cases} x+y=a \\ xy=-b \end{cases} \Rightarrow x, y$ là nghiệm PT:

$$X^2 - aX - b = 0. \quad (1)$$

Giả sử tồn tại tại x, y, tức là phương trình (1) có nghiệm. Đặt $v_n = u_n - x.u_{n-1}$. Ta có:

$$\begin{cases} v_1 = q - x.p \\ v_{n+1} = yv_n \end{cases} \Rightarrow v_n = (q - xp)y^{n-1}$$

Suy ra:

$$u_n - x.u_{n-1} = (q - px)y^{n-1}.$$

• Nếu (1) có hai nghiệm phân biệt, hay $x \neq y$. Ta có:

$$u_n = \frac{yp - q}{y - x}x^n + \frac{q - xp}{y - x}y^n.$$

• Ta xét trường hợp còn lại: (1) có nghiệm kép thì $x = y = \frac{a}{2}$ .Suy ra

$$u_n - \frac{a}{2}u_{n-1} = (q - \frac{pa}{2})(\frac{a}{2})^{n-1}.$$

Từ đó ta tìm được:

$$u_n = \left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{pa}{2} + (q - \frac{ap}{2})n\right].$$

■

Vậy ta có kết quả tổng quát sau:

Dạng 6: Cho a, b, c là các số thực khác không; $a^2 - 4b \geqslant 0$ và dãy (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 = p;\ u_1 = q \\ u_{n+1} = a.u_n + b.u_{n-1} \end{cases}.$$

Khi đó:

• *Nếu $a^2 - 4b > 0$ thì*

$$u_n = \frac{y.u_0 - u_1}{y - x}x^n + \frac{u_1 - x.u_0}{y - x}y^n,$$

trong đó x, y là nghiệm của phương trình : $X^2 - aX - b = 0$ (1).

• *Nếu $a^2 - 4b = 0$ thì*

$$u_n = \left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{pa}{2} + (q - \frac{ap}{2})n\right].$$

Phương trình (1) gọi là phương trình đặc trưng của dãy.

Chú ý 6. *Để xác định CTTQ của dãy (u_n) nói trên ta có thể trình bày như sau:*
Xét phương trình đặc trưng (1).

• *Nếu (1) có hai nghiệm phân biệt X_1, X_2 thì $u_n = x.X_1^n + y.X_2^n$, dựa vào u_0, u_1 ta tìm được x, y.*

• *Nếu (1) có nghiệm kép $X_1 = X_2 = \alpha$ thì $u_n = (pn + q).\alpha^n$, dựa vào u_0, u_1 ta tìm được p, q.*

Ví dụ 1.32

Xác định CTTQ của dãy (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_0 = -1; u_1 = 3 \\ u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = 2n^2 + 2n + 1, \forall n \geqslant 2 \end{cases}.$$

Lời giải. Ta tìm cách làm mất vế phải trong công thức truy hồi của dãy, bằng cách: Đặt $u_n = x_n + an^2 + bn + c$. Thay vào công thức truy hồi của dãy và rút gọn ta được $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-1} + 2an^2 - (14a + 2b)n + 19a - b + 2c = 2n^2 + 2n + 1$ Ta chọn a, b, c:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 14a + 2b = -2 \\ 19a - b + 2c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = -13 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$(x_n): \begin{cases} x_0 = 12;\ x_1 = 23 \\ x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0 \end{cases}.$$

Từ đây ta tìm được:

$$x_n = 13.2^n - 3^n \Rightarrow u_n = 13.2^n - 3^n + n^2 - 8n - 13.$$

■

Ví dụ 1.33

Tìm CTTQ của dãy số:

$$(u_n): \begin{cases} u_1 = p; u_2 = q \\ a.u_{n+1} + b.u_n + c.u_{n-1} = f(n)\ ;\ \forall n \geqslant 2 \end{cases}$$

(trong đó $f(n)$ là đa thức theo n và $b^2 - 4ac \geqslant 0$).

Lời giải. Đặt $u_n = x_n + g(n)$ với $g(n)$ là một đa thức theo n. Thay vào công thức truy hồi của dãy ta được:

$$a.x_n + b.x_{n-1} + c.x_{n-2} + a.g(n) + b.g(n-1) + cg(n-2) = f(n).$$

Ta chọn $g(n): a.g(n) + bg(n-1) + cg(n-2) = f(n)$ (*).
Khi đó: $a.x_n + bx_{n-1} + c.x_{n-2} = 0$. Từ đây, ta có được CTTQ của dãy (x_n), từ đó ta tìm được CTTQ của dãy (u_n).
Vấn đề còn lại là giải phương trình (*).
Giả sử

$$g(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + ... + a_1 n + a_0$$

là đa thức bậc k. Khi đó hệ số của x^k và x^{k-1} trong VP là:

$$a_k.(a + b + c)x^k \text{ và } [-(b + 2c)k.a_k + (a + b + c)a_{k-1}]x^{k-1}.$$

Do đó :
* Nếu PT: $aX^2+bX+c=0$ (1) có nghiệm hai nghiệm phân biệt khác 1 thì $a+b+c\neq 0$ nên VT(*) là một đa thức bậc k.
* Nếu PT (1) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x=1 \Rightarrow a+b+c=0$ và

$$-(b+2c)k.a_k+(a+b+c)a_{k-1}=-(b+2c).k.a_k\neq 0$$

nên VT là một đa thức bậc $k-1$.
* Nếu PT (1) có nghiệm kép $x=1 \Rightarrow a+b+c=0$ và

$$[-(b+2c)k.a_k+(a+b+c)a_{k-1}]x^{k-1}=0$$

nên VT(*) là một đa thức bậc $k-2$.
Vậy để chọn $g(n)$ ta cần chú ý như sau:
• Nếu (1) có hai nghiệm phân biệt, thì $g(n)$ là một đa thức cùng bậc với $f(n)$.
• Nếu (1) có hai nghiệm phân biệt, trong đó một nghiệm bằng 1 thì ta chọn $g(n)$ là đa thức lớn hơn bậc của $f(n)$ một bậc.
• Nếu (1) có nghiệm kép $x=1$ thì ta chọn $g(n)$ là đa thức có bậc lớn hơn bậc của $f(n)$ hai bậc. ∎

Dạng 7: *Để tìm CTTQ của dãy*

$$(u_n):\begin{cases} u_1=p;u_2=q \\ a.u_{n+1}+b.u_n+c.u_{n-1}=f(n)\ ;\ \forall n\geqslant 2\end{cases},$$

(trong đó $f(n)$ là đa thức theo nbậc k và $b^2-4ac\geqslant 0$) ta làm như sau:
• Xác định đa thức $g(n): a.g(n)+bg(n-1)+cg(n-2)=f(n)$, trong đó $g(n)$ là: đa thức theo n bậc k nếu PT (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1; đa thức bậc $k+1$ nếu (1) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1; đa thức bậc $k+2$ nếu (1) có nghiệm kép $x=1$.
• Khi xác định được $g(n)$ ta đặt $u_n=x_n+g(n)$, ta có dãy (x_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_0=p-g(0);\ x_1=u_1-g(1) \\ a.x_{n+1}+bx_n+cx_{n-1}=0\ \forall n\geqslant 1\end{cases}.$$

Từ đây ta xác định được CTTQ của (x_n), từ đó ta tìm được CTTQ của dãy (u_n).

Ví dụ 1.34

Tìm CTTQ của dãy số

$$(u_n):\begin{cases} u_0=-1;u_1=3 \\ u_n-5u_{n-1}+6u_{n-2}=5.2^n\ \forall n\geqslant 2\end{cases}.$$

Lời giải. Đặt $u_n = x_n + y.2^n$. Khi thay vào công thức truy hồi ta không làm mất 5.2^n ở VT. Ta sẽ đi tìm cách giải khác cho bài toán này Ta viết công thức truy hồi của dãy như sau:

$$(u_n - 2u_{n-1}) - 3(u_{n-1} - 2u_{n-2}) = 5.2^n.$$

Đặt

$$x_n = u_n - 2u_{n-1} \Rightarrow x_n - 3x_{n-1} = 5.2^n.$$

Suy ra:

$$x_n = 25.3^{n-1} - 10.2^n \Rightarrow u_n - 2u_{n-1} = 25.3^{n-1} - 10.2^n.$$

Ta đặt $u_n = v_n + a.3^n + bn.2^n$ Ta được:

$$v_n = 2v_{n-1} + (25-a)3^{n-1} - (b+10)2^n.$$

Ta chọn $a = 25, b = -10$. Suy ra

$$v_n = v_0.2^n = -26.2^n \Rightarrow u_n = 25.3^n - (5n+13).2^{n+1}.$$

■

Chú ý 7. *Dựa vào CTTQ đã xác định ở trên, ta có thể giải bài toán trên theo cách khác như sau:*
Đặt $u_n = x_n + yn.2^n$, ta có: $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} - y.2^{n-1} = 5.2^n$, ta chọn $y = -10$, suy ra

$$(x_n): \begin{cases} x_0 = -1; x_1 = 23 \\ x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0 \ \forall n \geqslant 2 \end{cases}.$$

Từ đây, ta có:

$$x_n = -26.2^n + 25.3^n \Rightarrow u_n = 25.3^n - (5n+13).2^{n+1}.$$

Ví dụ 1.35

Tìm CTTQ của dãy

$$(u_n): \begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 3 \\ u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 3.2^n \end{cases}.$$

Lời giải. Với dãy số này nếu ta đặt $u_n = x_n + y.2^n$ thì khi thay vào công thức truy hồi của dãy ta không xác định được y. Nên ta sẽ tìm cách giải khác cho bài toán này. Ta viết lại công thức truy hồi của dãy như sau:

$$(u_n - 2u_{n-1}) - 2(u_{n-1} - 2u_{n-2}) = 3.2^n.$$

Đặt $x_n = u_n - 2u_{n-1}$, ta có:

$$x_n - 2x_{n-1} = 3.2^n.$$

Ta có:

$$x_n = (6n-5).2^{n-1} \Rightarrow u_n - 2u_{n-1} = (6n-5).2^{n-1}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} u_n &= (u_n - 2u_{n-1}) + 2(u_{n-1} - 2u_{n-2}) + \ldots + 2^{n-1}(u_1 - 2u_0) + 2^n.u_0 \\ &= 2^{n-1}\sum_{i=1}^{n}(6i-5) + 2^n = 2^{n-1}\left[6\sum_{i=1}^{n} i - 5n + 2\right] \\ &= \left[6\frac{(n+1)n}{2} - 5n + 2\right]2^{n-1} = (3n^2 - 2n + 2)2^{n-1}. \end{aligned}$$

■

Chú ý 8. *Từ CTTQ của dãy (u_n) ta có thể giải bài toán trên theo cách khác như sau: Đặt $u_n = x_n + yn^2.2^n$. Ta có:*

$$x_n - 4x_{n-1} + 4x_{n-2} + 2y.2^n = 3.2^n.$$

Ta chọn $y = \frac{3}{2} \Rightarrow (x_n) : \begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 0 \\ x_n - 4x_{n-1} + 4x_{n-2} = 0\ \forall n \geqslant 2 \end{cases}$

Ta tìm được:$x_n = (2-2n)2^{n-1}$. *Suy ra*

$$u_n = (2-2n).2^{n-1} + 3n^2.2^{n-1} = (3n^2 - 2n + 2)2^{n-1}.$$

Từ ba ví dụ trên ta rút ra được nhận xét sau:

Dạng 8: *Cho dãy số (u_n) xác định bởi:*

$$\begin{cases} u_0; u_1 \\ u_n + b.u_{n-1} + c.u_{n-2} = d.\alpha^n;\ \forall n \geqslant 2 \end{cases}.$$

Để xác định CTTQ của dãy (u_n) ta làm như sau:

- *Nếu phương trình :*

$$X^2 + bX + c = 0. \quad (1)$$

có hai nghiệm phân biệt khác α thì ta đặt

$$u_n = x_n + \frac{d\alpha}{a\alpha^2 + b\alpha + c}.\alpha^n.$$

Ta có: $a.x_{n+1} + bx_n + c.x_{n-1} = 0$. Từ đây ta tìm được $x_n \Rightarrow u_n$.

- *Nếu $x = \alpha$ là nghiệm đơn của (1) thì ta đặt:*

$$u_n = x_n - \frac{d\alpha^2}{b + 2c}n.\alpha^n,$$

ta có: $a.x_{n+1} + bx_n + c.x_{n-1} = 0$. Từ đây ta tìm được $x_n \Rightarrow u_n$.

- *Nếu $x = \alpha$ là nghiệm kép của (1) thì ta đặt:*

$$u_n = x_n + \frac{d\alpha^2}{b\alpha + 4c}.n^2.\alpha^n,$$

ta có: $a.x_{n+1} + bx_n + c.x_{n-1} = 0$. Từ đây ta tìm được $x_n \Rightarrow u_n$.

Với cách xây dựng tương tự ta cũng có được các kết quả sau

Dạng 9: *Cho dãy (u_n) xác định bởi :*

$$\begin{cases} u_1 = x, u_2 = y, u_3 = z \\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n + du_{n-1} = 0 \ \forall n \geqslant 2 \end{cases}.$$

Để xác định CTTQ của dãy ta xét phương trình:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

((1) gọi là phương trình đặt trưng của dãy).

- *Nếu (1) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thì*

$$u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n.$$

Dựa vào u_0, u_1, u_2 ta tìm được α, β, γ.

- *Nếu (1) có một nghiệm đơn, 1 nghiệm kép: $x_1 = x_2 \neq x_3$ thì*

$$u_n = (\alpha + \beta n)x_1^n + \gamma . x_3^n.$$

Dựa vào u_0, u_1, u_2 ta tìm được α, β, γ.

- *Nếu (1) có nghiệm bội 3 $x_1 = x_2 = x_3$ thì*

$$u_n = (\alpha + \beta n + \gamma n^2)x_1^n.$$

Dựa vào u_0, u_1, u_2 ta tìm được α, β, γ.

Ví dụ 1.36

Tìm CTTQ của dãy (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 3, \\ u_n = 7u_{n-1} - 11.u_{n-2} + 5.u_{n-3}, \ \forall n \geqslant 4 \end{cases}.$$

Lời giải. Xét phương trình đặc trưng :

$$x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = 0.$$

Phương trình có 3 nghiệm thực: $x_1 = x_2 = 1, \ x_3 = 5$.
Vậy

$$a_n = \alpha + \beta n + \gamma 5^n.$$

Cho $n = 1, \ n = 2, \ n = 3$ và giải hệ phương trình tạo thành, ta được

$$\alpha = -\frac{1}{16}, \ \beta = \frac{3}{4}, \ \gamma = \frac{1}{16}.$$

Vậy $a_n = -\dfrac{1}{16} + \dfrac{3}{4}(n-1) + \dfrac{1}{16}.5^{n-1}$. ■

Ví dụ 1.37

Tìm CTTQ của dãy số:

$$(u_n),(v_n):\begin{cases} u_0=2;\ u_n=2u_{n-1}+v_{n-1} \\ v_0=1;\ v_n=u_{n-1}+2v_{n-1}\end{cases}\ \forall n\geqslant 1.$$

Lời giải. Ta có:

$$u_n=2u_{n-1}+u_{n-2}+2v_{n-2}=2u_{n-1}+u_{n-2}+2(u_{n-1}-2u_{n-2})$$

Suy ra $u_n=4u_{n-1}-3u_{n-2}$ và $u_1=5$.
Từ đó ta tìm được:

$$u_n=\frac{1+3^{n+1}}{2}\Rightarrow v_n=u_{n+1}-2u_n=\frac{-1+3^{n+1}}{2}.$$

■

Chú ý 9. *Cho dãy $(x_n),(y_n)$ xác định bởi:*

$$\begin{cases} x_{n+1}=px_n+qy_n\ x_1=a \\ y_{n+1}=ry_n+sx_n\ y_1=b\end{cases}.$$

Để xác định CTTQ của hai dãy $(x_n),(y_n)$ ta làm như sau.
Cách 1. Ta biến đổi được:

$$x_{n+1}-(p+s)x_n+(ps-qr)x_{n-1}=0,$$

từ đây ta xác định được x_n, thay vào hệ đã cho ta có được y_n.
Cách 2: Ta đưa vào các tham số phụ λ,λ'

$$\begin{cases} x_{n+1}-\lambda y_{n+1}=(p-\lambda s)(x_n-\dfrac{q-\lambda r}{\lambda s-p}y_n) \\ x_{n+1}+\lambda' y_{n+1}=(p+\lambda' s)(x_n+\dfrac{q+\lambda' r}{p+\lambda' s}y_n)\end{cases}$$

Ta chọn λ,λ' sao cho

$$\begin{cases} \lambda=\dfrac{q-\lambda r}{\lambda s-p} \\ \lambda'=\dfrac{q+\lambda' r}{\lambda' s+p}\end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{cases} x_{n+1}-\lambda y_{n+1}=(p-\lambda s)(x_n-\lambda y_n) \\ x_{n+1}+\lambda' y_{n+1}=(p+\lambda' s)(x_n+\lambda' y_n)\end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} x_{n+1}-\lambda y_{n+1}=(p-\lambda s)^n(x_1-\lambda y_1) \\ x_{n+1}+\lambda' y_{n+1}=(p+\lambda' s)^n(x_1+\lambda' y_1)\end{cases}$$

giải hệ này ta tìm được (x_n), (y_n).

Ví dụ 1.38

Tìm CTTQ của dãy

$$(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{2u_{n-1}}{3u_{n-1}+4} \quad \forall n \geqslant 2 \end{cases}.$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{1}{u_n} = \frac{3u_{n-1}+4}{2u_{n-1}} = \frac{3}{2} + 2\frac{1}{u_{n-1}}.$$

Đặt $x_n = \dfrac{1}{u_n}$, ta có:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = 2x_{n-1} + \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

ta tìm được: $x_n = \dfrac{5.2^{n-1}-3}{2} \Rightarrow u_n = \dfrac{2}{5.2^{n-1}-3}$. ■

Ví dụ 1.39

Tìm CTTQ của dãy số

$$(u_n): \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = \dfrac{-9u_{n-1}-24}{5u_{n-1}+13} \quad \forall n \geqslant 2 \end{cases}.$$

Lời giải. Ta đưa vào dãy phụ bằng cách đặt $u_n = x_n + a$. Thay vào công thức truy hồi, ta có:

$$x_n + a = \frac{-9x_{n-1}-9a-24}{5x_{n-1}+5a+13} \Rightarrow x_n = \frac{(-9-5a)x_{n-1}-5a^2-22a-24}{5x_{n-1}+5a+13}.$$

Ta chọn

$$a: 5a^2 + 22a + 24 = 0 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow x_1 = 4.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} & x_n = \frac{x_{n-1}}{5x_{n-1}+3} \\ & \Rightarrow \frac{1}{x_n} = 5 + \frac{3}{x_{n-1}} \\ & \Rightarrow \frac{1}{x_n} = \frac{11.3^{n-1}-10}{4} \\ & \Rightarrow x_n = \frac{4}{11.3^{n-1}-10} \\ & \Rightarrow u_n = x_n - 2 = \frac{-22.3^{n-1}+24}{11.3^{n-1}-10}. \end{aligned}$$

■

Chú ý 10. *Cho dãy*
$$(u_n): u_1=\alpha;\ u_n=\frac{pu_{n-1}+q}{ru_{n-1}+s}\ \forall n\geqslant 2.$$
Để tìm CTTQ của dãy (u_n) *ta làm như sau: Đặt* $u_n=x_n+t$*, thay vào công thức truy hồi của dãy ta có:*
$$x_n=\frac{px_{n-1}+pt+q}{ru_{n-1}+rt+s}-t=\frac{(p-rt)x_{n-1}-rt^2+(p-s)t+q}{rx_{n-1}+rt+s} \quad (1).$$
Ta chọn $t: rt^2+(s-p)t-q=0$*. Khi đó ta chuyển (1) về dạng:*
$$\frac{1}{x_n}=a\frac{1}{x_{n-1}}+b.$$
Từ đó ta tìm được $\frac{1}{x_n}$*, suy ra* $x_n\Rightarrow u_n$*.*

Ví dụ 1.40

Xác định CTTQ của hai dãy số $(u_n),(v_n)$:
$$\begin{cases}u_1=2\\ v_1=1\end{cases}\text{ và }\begin{cases}u_n=u_{n-1}^2+2v_{n-1}^2\\ v_n=2u_{n-1}v_{n-1}\end{cases}\ \forall n\geqslant 2.$$

Lời giải. Ta có:
$$\begin{cases}u_n=u_{n-1}^2+2v_{n-1}^2\\ \sqrt{2}v_n=2\sqrt{2}u_{n-1}v_{n-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_n+\sqrt{2}v_n=\left(u_{n-1}+\sqrt{2}v_{n-1}\right)^2\\ u_n-\sqrt{2}v_n=\left(u_{n-1}-\sqrt{2}v_{n-1}\right)^2\end{cases}$$
Do đó
$$\begin{cases}u_n+\sqrt{2}v_n=\left(u_1+\sqrt{2}v_1\right)^{2^{n-1}}=\left(2+\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}\\ u_n-\sqrt{2}v_n=\left(u_1-\sqrt{2}v_1\right)^{2^{n-1}}=\left(2-\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}\end{cases}.$$
Suy ra
$$\begin{cases}u_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}+\left(2-\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}\right]\\ v_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(2+\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}-\left(2-\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}\right]\end{cases}.$$
■

Ví dụ 1.41

Xác định CTTQ của dãy số
$$(x_n):\begin{cases}x_1=2\\ x_n=\dfrac{x_{n-1}^2+2}{2x_{n-1}}\ \forall n\geqslant 2\end{cases}.$$

Lời giải. Xét hai dãy

$$(u_n),(v_n):\begin{cases}u_1=2\\ v_1=1\end{cases} \text{ và } \begin{cases}u_n=u_{n-1}^2+2v_{n-1}^2\\ v_n=2u_{n-1}v_{n-1}\end{cases} \forall n\geqslant 2.$$

Ta chứng minh $x_n=\dfrac{u_n}{v_n}$ (*).

- $n=2\Rightarrow x_2=\dfrac{u_2}{v_2}=2\Rightarrow n=2$ (*) đúng.
- Giả sử

$$x_{n-1}=\frac{u_{n-1}}{v_{n-1}}\Rightarrow x_n=\frac{x_{n-1}^2+2}{2x_{n-1}}=\frac{u_{n-1}^2+2v_{n-1}^2}{2u_{n-1}v_{n-1}}=\frac{u_n}{v_n}.$$

Suy ra (*) được chứng minh.

Theo kết quả bài toán trên, ta có:

$$x_n=\sqrt{2}\frac{(2+\sqrt{2})^{2^{n-1}}+(2-\sqrt{2})^{2^{n-1}}}{(2+\sqrt{2})^{2^{n-1}}-(2-\sqrt{2})^{2^{n-1}}}.$$

■

Chú ý 11. *Từ cách giải hai ví dụ trên ta có chú ý:*

1) Để tìm CTTQ của hai dãy số $(u_n),(v_n)$ được xác định bởi:

$$\begin{cases}u_n=u_{n-1}^2+a.v_{n-1}^2\ ;\ u_1=\alpha\\ v_n=2v_{n-1}u_{n-1}\ ;\ v_1=\beta\end{cases}$$

(trong đó a là số thực dương) ta làm như sau:

Ta có:

$$\begin{cases}u_n=u_{n-1}^2+a.v_{n-1}^2\\ \sqrt{a}.v_n=2\sqrt{a}.v_{n-1}u_{n-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(u_n+\sqrt{a}u_{n-1}=(u_{n-1}+\sqrt{a}u_{n-1})^2\\ (u_n-\sqrt{a}u_{n-1}=(u_{n-1}-\sqrt{a}u_{n-1})^2\end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases}u_n=\dfrac{1}{2}\left[(\alpha+\beta\sqrt{a})^{2^{n-1}}+(\alpha-\beta\sqrt{a})^{2^{n-1}}\right]\\ v_n=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\left[(\alpha+\beta\sqrt{a})^{2^{n-1}}-(\alpha-\beta\sqrt{a})^{2^{n-1}}\right]\end{cases}.$$

2) Để tìm CTTQ của dãy

$$(x_n):\begin{cases}x_1=\alpha\\ x_n=\dfrac{x_{n-1}^2+a}{2x_{n-1}}\end{cases}$$

ta làm như sau:

Xét hai dãy

$$(u_n),(v_n):\begin{cases}u_n=u_{n-1}^2+a.v_{n-1}^2\ ;\ u_1=\alpha\\ v_n=2v_{n-1}u_{n-1}\ ;\ v_1=1\end{cases}$$

Khi đó:

$$x_n=\frac{u_n}{v_n}=\sqrt{a}\frac{(\alpha+\sqrt{a})^{2^{n-1}}+(\alpha-\sqrt{a})^{2^{n-1}}}{(\alpha+\sqrt{a})^{2^{n-1}}+(\alpha-\sqrt{a})^{2^{n-1}}}.$$

Ví dụ 1.42

Cho dãy

$$(u_n):\begin{cases} u_1=1 \\ u_n=5u_{n-1}+\sqrt{24u_{n-1}^2-8}\ \forall n\geqslant 2\end{cases}.$$

Tìm CTTQ dãy số (u_n).

Lời giải. Ta có: $u_2=9; u_3=89; u_4=881$. Giả sử: $u_n=xu_{n-1}+yu_{n-2}$, suy ra

$$\begin{cases} 9x+y=89 \\ 89x+9y=881\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=10 \\ y=-1\end{cases}.$$

Ta chứng minh: $u_n=10u_{n-1}-u_{n-2},\ \forall n\geqslant 3$.
Từ công thức truy hồi của dãy ta có:

$$(u_n-5u_{n-1})^2=24u_{n-1}^2-8$$

$$\Leftrightarrow u_n^2-10u_nu_{n-1}+u_{n-1}^2+8=0. \quad (1)$$

thay n bởi $n-1$, ta được:

$$u_{n-2}^2-10u_{n-2}u_{n-1}+u_{n-1}^2-8=0 \quad (2).$$

Từ $(1),(2)\Rightarrow u_{n-2},u_n$ là hai nghiệm của phương trình :

$$t^2-10u_{n-1}t+u_{n-1}^2-8=0.$$

Áp dụng định lí Viet, ta có:

$$u_n+u_{n-2}=10u_{n-1}.$$

Vậy

$$u_n=\frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{6}}\left(5-2\sqrt{6}\right)^{n-1}+\frac{\sqrt{6}+2}{2\sqrt{6}}\left(5+2\sqrt{6}\right)^{n-1}.$$

■

Chương 2

GIỚI HẠN DÃY SỐ

2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.1. *Dãy* (u_n) *được gọi là có giới hạn (hoặc hội tụ) bằng* l*, kí hiệu* $\lim u_n = l$ *nếu với mọi* $\varepsilon > 0$ *nhỏ tùy ý, luôn tồn tại số tự nhiên* n_0 *sao cho* $|u_n - l| < \varepsilon\ \forall n > n_0$.

Ví dụ 2.1

Chứng minh rằng $\lim \dfrac{2n+1}{n+1} = 2$.

Lời giải. Với $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, ta có

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Do đó, ta chọn $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right]$ thì ta có

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Vậy $\lim \dfrac{2n+1}{n+1} = 2$. ■

Định nghĩa 2.2. *Dãy số* (u_n) *được gọi là có giới hạn dần về dường vô cực, kí hiệu* $\lim u_n = +\infty$ *nếu với mọi số thực dương* M *lớn tùy ý, luôn tồn tại số tự nhiên* n_0 *sao cho* $u_n > M$ *với mọi* $n > n_0$.

Định nghĩa 2.3. *Dãy số* (u_n) *được gọi là có giới hạn dần về âm vô cực, kí hiệu* $\lim u_n = -\infty$*, nếu* $\lim(-u_n) = +\infty$.

Ví dụ 2.2

Chứng minh rằng

1. $\lim \dfrac{n^2+1}{n} = +\infty$
2. $\lim \dfrac{2-n}{\sqrt{n}} = -\infty$.

Lời giải. 1) Với mọi số thực dương M lớn tùy ý, ta có:

$$\left|\frac{n^2+1}{n}\right| > M \Leftrightarrow n^2 - Mn + 1 > 0 \Leftrightarrow n > \frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}.$$

Ta chọn $n_0 = \left[\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}\right]$ thì ta có:

$$\frac{n^2+1}{n} > M,\ \forall n > n_0.$$

Do đó: $\lim \frac{n^2+1}{n} = +\infty$.
2) Với mọi $M > 0$ lớn tùy ý, ta có:

$$\frac{n-2}{\sqrt{n}} > M \Leftrightarrow n - M\sqrt{n} - 2 > 0 \Leftrightarrow n > \left(\frac{M+\sqrt{M^2+8}}{2}\right)^2.$$

Ta chọn $n_0 = \left[\left(\frac{M+\sqrt{M^2+8}}{2}\right)^2\right]$ thì ta có:

$$\frac{n-2}{\sqrt{n}} > M,\ \forall n > n_0.$$

Do đó: $\lim \frac{2-n}{\sqrt{n}} = -\infty$. ■

Chú ý 12. *Ta có các giới hạn cơ bản sau*

- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ *với* $k \in \mathbb{N}*$
- *Nếu* $|q| < 1$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- *Nếu* $u_n = c$ *(với* c *là hằng số) thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c = c$
- $\lim n^k = +\infty$ *với mọi* $k > 0$
- $\lim q^n = +\infty$ *với mọi* $q > 1$.

2.2 Các định lí về giới hạn

Định lí 2.1. *Nếu dãy* (u_n) *có giới hạn hữu hạn thì giới hạn đó là day nhất.*

Chứng minh. Giả sử $\lim u_n = l$ và $\lim u_n = l'$. Khi đó, theo định nghĩa thì với mọi $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, luôn tồn tại các số tự nhiên n_1, n_2 sao cho

$$|u_n - l| < \varepsilon\ \forall n > n_1 \text{ và } |u_n - l'| < \varepsilon\ \ \forall n > n_2.$$

Đặt $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, khi đó với mọi $n > n_0$ ta có

$$|l - l'| \leqslant |l - u_n| + |u_n - l'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \quad (1)$$

Vì (1) đúng với mọi $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý nên ta có $l = l'$.
Vậy định lí được chứng minh. □

Định lí 2.2. *Cho dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn l. Khi đó*

a) Dãy (u_n) bị chặn

b) Các dãy con đều có giới hạn là l.

Chứng minh. Giả sử dãy số (a_n) có giới hạn bằng L. Ta sẽ chứng minh (a_n) là dãy số bị chặn.
Thật vậy, xét $\varepsilon = 1$. Với mọi $n \geqslant n_0$, với n_0 là số nguyên dương nào đó, ta luôn có $|a_n - L| < 1$. Suy ra $|a_n| - |L| \leqslant |a_n - L| < 1$ với mọi $n \geqslant n_0$ hay $|a_n| < |L| + 1$ với $n \geqslant n_0$.
Gọi M là số lớn nhất trong tập hợp hữu hạn

$$\{|a_1|;|a_2|;\ldots;|a_{N-1}|\}$$

và đặt $K = \max\{M+1, |L|+1\}$.
Khi đó $|a_n| < K$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Đây chính là điều cần chứng minh. □

Ví dụ 2.3

Chứng minh dãy $(u_n): u_n = (-1)^n$ không có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Lời giải. Ta có $\lim u_{2n} = \lim(-1)^{2n} = 1$ và $\lim u_{2n+1} = \lim(-1)^{2n+1} = -1$.
Từ đó, suy ra dãy (u_n) không có giới hạn khi $n \to +\infty$. ■

Định lí 2.3. *Cho* $\lim u_n = a,\ \lim v_n = b$. *Ta có:*

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n . v_n) = a.b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}\ (b \neq 0)$
- *Nếu* $u_n \geqslant 0\ \forall n$ *thì* $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

Chứng minh. Ta chứng minh công thức $\lim u_n.v_n = ab$. Các công thức khác được chứng minh tương tự.
Vì $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ nên dãy (v_n) bị chặn, tức alf tồn tại số nguyên dương M sao cho $|v_n| < M\ \forall n \in \mathbb{N}$ và với mọi $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, luôn tồn tại các số tự nhiên n_1, n_2 sao cho

$$|u_n - a| < \frac{\varepsilon}{M + |a|}\quad \forall n > n_1 \text{ và } |v_n - b| < \frac{\varepsilon}{M+|a|}\quad \forall n > n_2.$$

Đặt $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Khi đó với mọi $n > n_0$ ta có:

$$|u_n.v_n - ab| = |v_n(u_n - a) + a(v_n - b)| \leqslant |v_n||u_n - a| + |a|.|v_n - b| < \varepsilon.$$

Suy ra $\lim u_n.v_n = ab$. □

Ví dụ 2.4

Tìm giới hạn

$$A=\lim\frac{a_k.n^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1n+a_0}{b_p.n^p+b_{p-1}n^{p-1}+\ldots+b_1n+b_0}$$

với $a_kb_p\neq 0$

Lời giải. Ta chia làm các trường hợp sau

TH 1: $n=k$, chia cả tử và mẫu cho n^k, ta được

$$A=\lim\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+\ldots+\frac{a_0}{n^k}}{b_p+\frac{b_{p-1}}{n}+\ldots+\frac{b_0}{n^k}}=\frac{a_k}{b_p}.$$

TH 2: $k>p$, chia cả tử và mẫu cho n^k, ta được

$$A=\lim\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+\ldots+\frac{a_0}{n^k}}{\frac{b_p}{n^{k-p}}+\frac{b_{p-1}}{n^{k-p+1}}+\ldots+\frac{b_0}{n^k}}=\begin{cases}+\infty \text{ khi } a_kb_p>0\\ -\infty \text{ khi } a_kb_p<0\end{cases}.$$

TH 3: $k<p$, chia cả tử và mẫu cho n^p, ta được

$$A=\lim\frac{\frac{a_k}{n^{p-k}}+\frac{a_{k-1}}{n^{p-k+1}}+\ldots+\frac{a_0}{n^p}}{b_p+\frac{b_{p-1}}{n}+\ldots+\frac{b_0}{n^p}}=0.$$

■

Ví dụ 2.5

Tìm giới hạn

$$A=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-2\sqrt[3]{n^3+n^2-1}+n\right).$$

Lời giải. Ta có:

$$A=\lim\left[\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)-2\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right)\right].$$

Mà:

$$\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)=\lim\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$$

$$=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right)=\lim\frac{n^2-1}{\sqrt[3]{(n^3+n^2-1)^2}+n.\sqrt[3]{n^3+n^2-1}+n^2}$$

$$=\lim\frac{1-\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^6}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}+1}=\frac{1}{3}$$

Vậy $A = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$. ■

Ví dụ 2.6

Tìm giới hạn

$$A = \lim \frac{1 + a + a^2 + \ldots + a^n}{1 + b + b^2 + \ldots + b^n}$$

với $a, b \in \mathbb{R}; |a| < 1; |b| < 1$.

Lời giải. Ta có $1, a, a^2, \ldots, a^n$ là một cấp số nhân công bội a nên:

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Tương tự:

$$1 + b + b^2 + \ldots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}.$$

Suy ra $A = \lim \dfrac{\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}}{\frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}} = \dfrac{1 - b}{1 - a}$. ■

Định lí 2.4. ***(Nguyên lí kẹp)*** *Cho ba dãy số (a_n), (b_n) và (c_n) thỏa mãn $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ với mọi $n \geqslant n_0 \in \mathbb{N}^*$. Khi đó nếu $\lim a_n = \lim c_n = L$ thì $\lim b_n = L$.*

Chứng minh. Với mọi số nguyên dương n ta có:

$$\begin{aligned} |b_n - L| &= |b_n - a_n + a_n - L| \leqslant |b_n - a_n| + |a_n - L| \\ &= b_n - a_n + |a_n - L| \leqslant c_n - a_n + |a_n - L| \\ &= c_n - L + L - a_n + |a_n - L| \leqslant |c_n - L| + 2|a_n - L|. \end{aligned}$$

Xét số dương ε. Vì $\lim a_n = \lim c_n = L$ nên tồn tại số nguyên dương N để $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{3}$ và $|c_n - L| < \frac{\varepsilon}{3}$ với mọi $n \geqslant N$.
Theo các khẳng định trên thì $|b_n - L| < \varepsilon$ với mọi $n \geqslant N$. Vậy $\lim b_n = L$. □

Ví dụ 2.7

Chứng minh các giới hạn sau

1. $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$
2. $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ với $a > 0$.

Lời giải. 1) Gọi m là số tự nhiên thỏa: $m + 1 > |a|$. Khi đó với mọi $n > m + 1$. Ta có:

$$0 < \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \left|\frac{a}{1}.\frac{a}{2}\ldots\frac{a}{m}\right|.\left|\frac{a}{m+1}\ldots\frac{a}{n}\right| < \frac{|a|^m}{m!}.\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m}.$$

Mà

$$\lim\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m} = 0.$$

Từ đó suy ra: $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$.
2) Nếu $a = 1$ thì ta có đpcm.

- Giả sử $a > 1$. Khi đó:

$$a = \left[1 + \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\right]^n > n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right).$$

Suy ra: $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n} \to 0$ nên $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

- Với $0 < a < 1$ thì

$$\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = 1.$$

Tóm lại ta luôn có: $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ với $a > 0$. ■

Ví dụ 2.8

Dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $1 < x_1 < 2$ và $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2}x_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số đã cho hội tụ. Tìm $\lim x_n$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp bất đẳng thức sau:

$$\left|x_n - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2^n}, \forall n \geqslant 3.$$

Thật vậy ta kiểm tra được ngay bất đẳng thức đúng với $n = 3$.
Giả sử bất đẳng thức đúng với $n \geqslant 3$, tức là

$$\left|x_n - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2^n}.$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
\left|x_{n+1} - \sqrt{2}\right| &= \frac{1}{2}\left|x_n - \sqrt{2}\right|\left|2 - \sqrt{2} - x_n\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left|x_n - \sqrt{2}\right|\left(\left|\sqrt{2} - x_n\right| + \left|2 - 2\sqrt{2}\right|\right) \\
&< \frac{1}{2}\left|x_n - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức đúng đến $n + 1$.
Mặt khác do $\lim \frac{1}{2^n} = 0$ nên từ bất đẳng thức trên và nguyên lý kẹp ta có

$$\lim\left(x_n - \sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow \lim x_n = \sqrt{2}.$$

■

Định lí 2.5. ***(Định lí Weierstrass)*** *Mọi dãy tăng và bị chặn trên hoặc giảm và bị chặn dưới đều có giới hạn hữu hạn.*

Ví dụ 2.9

Cho dãy số (x_n) được xác định như sau:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n},\ \forall n \geqslant 1.$$

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. • Bằng quy nạy ta chứng minh: $x_n < 4,\ \forall n$ (1).
Ta có: $x_1 = 1 < 4$ nên (1) đúng với $n = 1$.
Giả sử $x_k < 4,\ \forall k \leqslant n$, khi đó:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} + \sqrt{x_{n-1}} < \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4.$$

Từ đó suy ra (1) đúng với mọi n.
• Ta chứng minh dãy (x_n) là dãy tăng.
Ta có: $x_1 < x_2$. Giả sử $x_k > x_{k-1},\ \forall k \leqslant n$, khi đó:

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n} - \sqrt{x_{n-2}} > 0 \Rightarrow x_{n+1} > x_n.$$

Từ đó suy ra dãy (x_n) hội tụ.
Đặt $\lim x_n = x > 0$, ta có x là nghiệm của phương trình : $x = \sqrt{x} + \sqrt{x} \Rightarrow x = 4$.
Vậy $\lim x_n = 4$. ■

Ví dụ 2.10

Cho (x_n) được xác định bởi $x_1 = \dfrac{5}{2}$ và

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n^3 - 12x_n + \frac{20n+21}{n+1}}, n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh (x_n)có giới hạn hữu hạn và tính gới hạn đó.

Lời giải. +) Ta chứng minh $x_n > 2, \forall n \in \mathbb{N}*$ bằng qui nạp theo n(*).
Ta có $n = 1, x_1 = \dfrac{5}{2} > 2$nên (*) đúng khi $n = 1$.
Giả sử $x_n > 2$. Khi đó :

$$\begin{aligned} &x_{n+1} > 2 \Leftrightarrow x_{n+1}^2 > 4 \\ &\Leftrightarrow x_n^3 - 12x_n + \frac{20n+21}{n+1} > 4 \\ &\Leftrightarrow x_n^3 - 12x_n + 16 + \frac{1}{n+1} > 0 \\ &\Leftrightarrow (x_n+4)(x_n-2)^2 + \frac{1}{n+1} > 0 \end{aligned}$$

(BĐT này đúng).
+) Ta chứng minh (x_n) giảm theo qui nạp.

Giả sử $2 < x_n < x_{n-1} < ... < x_1 = \frac{5}{2}$.
Ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} & x_{n+1} < x_n \Leftrightarrow x_{n+1}^2 < x_n^2 \\ & \Leftrightarrow x_n^3 - 12x_n + \frac{20n+21}{n+1} < x_{n-1}^3 - 12x_{n-1} + \frac{20n+1}{n} \\ & \Leftrightarrow (x_n - x_{n-1})\left(x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2 - 12\right) - \frac{1}{n(n+1)} < 0 \end{aligned}$$

(BĐT đúng vì $x_n - x_{n-1} < 0, x_n > 2, x_{n-1} > 2$).
Dãy (x_n) giảm và bị chặn dưới bởi 2 nên có giới hạn $\lim x_n = a \left(2 \leqslant a < \frac{5}{2}\right)$.
Chuyển qua giới hạn từ hệ thức truy hồi , ta được

$$a = \sqrt{a^2 - 12a + 20} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{41}}{2} (l) \end{array}\right. .$$

Vậy (x_n) có giới hạn hưõ hạn và $\lim x_n = 2$. ■

Định nghĩa 2.4. *Dãy (u_n) được gọi là dãy Cauchy nếu với mọi $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, luôn tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho*

$$|u_m - u_n| < \varepsilon \quad \forall m, n > n_0.$$

Định lí 2.6. *Dãy (u_n) hội tụ khi và chỉ khi dãy (u_n) là dãy Cauchy.*

Ví dụ 2.11

Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $|f(x) - f(y)| \leqslant q|x - y|$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, trong đó $q \in (0,1)$ là hằng số cho trước. Với $c \in \mathbb{R}$ cho trước và xác định dãy $(x_n), n = 0,1,2,3...$ như sau:$x_0 = c, x_{n+1} = f(x_n), n = 0,1,2,....$ Chứng minh rằng dãy số (x_n) hội tụ và giới hạn của dãy số là nghiệm của phương trình $f(x) = x$.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh dãy (x_n) là một dãy Cauchy. Thật vậy, với $m, n \in \mathbb{N}, n > m$ ta có:

$$|x_n - x_m| = |f(x_{n-1} - f(x_{m-1}))| \leqslant q|x_{n-1} - x_{m-1}| \leqslant ... \leqslant q^m |x_{n-m} - x_0|. \quad (1)$$

Mặt khác ta có

$$|x_n - x_0| \leqslant |x_n - x_{n-1}| + ... + |x_1 - x_0| \leqslant \left(q^{n-1} + ... + 1\right)|x_1 - x_0| = \frac{1 - q^n}{1 - q}|x_1 - x_0|.$$

Từ đây suy ra $|x_n - x_0|$ bị chặn với mọi n. Kết hợp với (1) ta thu được với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m, n \geqslant N$ thì$|x_n - x_m| < \varepsilon$. Nên dãy (x_n) là một dãy Cauchy suy ra nó hội tụ.
Từ điều kiện của hàm f dễ dàng chứng minh được f liên tục và do đó từ đẳng thức $x_n = f(x_{n-1})$ chuyển qua giới hạn ta được giới hạn của dãy (x_n) là nghiệm của phương trình $f(x) = x$. ■

Nguyễn Tất Thu

Định lí 2.7. ***(Định lí Stolz)*** *Cho $(u_n),(v_n)$ là các dãy số thỏa mãn hai điều kiện sau*

- *(v_n) là dãy số tăng và $\lim v_n = +\infty$.*
- $\lim \dfrac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = a$.

Khi đó ta có $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = a$.

Chứng minh. Theo định nghĩa giới hạn ta có $\lim \dfrac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = a$ nên với $\forall \varepsilon > 0$ cho trước, luôn tồn tại số tự nhiên $n_0$sao cho $\forall n \geqslant n_0$ ta có:

$$\left|\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} - a\right| < \varepsilon \Leftrightarrow (a-\varepsilon)(v_{n+1}-v_n) < u_{n+1}-u_n < (v_{n+1}-v_n)(a+\varepsilon)$$

(do $v_{n+1}-v_n > 0$). Giả sử k là một số nguyên dương $k > n_0$ sao cho $v_{k+1} > 0$, khi đó ta có

$$(a-\varepsilon)(v_{i+1}-v_i) < u_{i+1}-u_i < (a+\varepsilon)(v_{i+1}-v_i); \forall i = n_0, \ldots, k$$

Lấy tổng theo vế các bất đẳng thức trên ta thu được

$$\sum_{i=n_0}^{k} (a-\varepsilon)(v_{i+1}-v_i) < \sum_{i=n_0}^{k} (u_{i+1}-u_i) < \sum_{i=n_0}^{k} (a+\varepsilon)(v_{i+1}-v_i)$$
$$\Leftrightarrow (a-\varepsilon)\left(v_{k+1}-v_{n_0}\right) < u_{k+1}-u_{n_0} < (a+\varepsilon)\left(v_{k+1}-v_{n_0}\right)$$
$$\Leftrightarrow (a-\varepsilon)\left(1-\frac{v_{n_0}}{v_{k+1}}\right) + \frac{u_{n_0}}{v_{k+1}} < \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}} < (a+\varepsilon)\left(1-\frac{v_{n_0}}{v_{k+1}}\right) + \frac{u_{n_0}}{v_{k+1}}$$

Cho $k \to +\infty$ với lưu ý $\lim v_n = +\infty$ ta được $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = a$ (đpcm). □

Nhận xét 1. *Chọn dãy (v_n)với số hạng tổng quát $v_n = n$ thì $v_{n+1} - v_n = 1$ nên từ định lí stolz ta có :*

- *Nếu $\lim(u_{n+1}-u_n) = a$ thì $\lim \frac{u_n}{n} = a$ (*).*
- *Trong (*) nếu thay $u_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ thì định lí stolz còn được phát biểu dưới dạng tương đương khác như sau và được gọi là định lí trung bình Cesaro:*
  Nếu $\lim v_n = a$ thì
$$\lim \frac{1}{n}(u_1+u_2+\ldots+u_n) = a.$$

Ví dụ 2.12

Cho dãy số thực dương (x_n) thỏa mãn $\lim \dfrac{x_n}{n} = +\infty$. Tìm giới hạn

$$\lim\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right).$$

Lời giải. Xét dãy $(a_n): a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_i}}$ và dãy $(b_n): b_n = \sqrt{n}$.

Ta có

$$0 \leqslant \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{x_{n+1}}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{x_{n+1}}} \leqslant \lim \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{x_{n+1}}} = 0.$$

Suy ra $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ hay $\lim \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_i}} \right) = 0.$ ■

Ví dụ 2.13

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 \geqslant 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{u_1 + u_2 + ... + u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\lim \frac{u_n}{n}$.

Lời giải. Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và

$$u_{n+1}^2 = u_1 + u_2 + ... + u_n \Rightarrow u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

do đó (u_n) là dãy tăng.

Giả sử tồn tại $\lim u_n = a$, khi đó từ đẳng thức $u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n$ chuyển qua giới hạn thu được $a^2 - a^2 = a \Leftrightarrow a = 0$ (vô lí, vì (u_n) tăng và $u_1 \geqslant 1$).

Vậy $\lim u_n = +\infty$; từ đó

$$\lim (u_{n+1} - u_n) = \lim \left(\sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n \right) = \lim \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} = \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Theo định lí Stolz suy ra $\lim \frac{u_n}{n} = \frac{1}{2}$. ■

Ví dụ 2.14

Cho dãy (x_n) thỏa mãn $\lim \left(x_n \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \right) = 1$. Chứng minh rằng

$$\lim \left(\sqrt[3]{3n}.x_n \right) = 1.$$

Lời giải. Đặt $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$, ta có $\lim (x_n s_n) = 1$.

Ta thấy dãy (s_n) tăng, do đó nếu dãy (s_n) bị chặn thì dãy (s_n) hội tụ, đặt $\lim s_n = x, x > 0$.

Ta có $\lim x_n = \frac{1}{x} > 0$, suy ra $\lim s_n = \lim \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \right) = +\infty$ (vô lí).

Do vậy dãy (s_n) không bị chặn hay $\lim s_n = +\infty$, suy ra $\lim x_n = 0$.

Mặt khác

$$\lim x_n s_n = \lim x_n s_{n-1} + \lim x_n^3 \Rightarrow \lim x_n s_{n-1} = 1.$$

Do

$$s_n^3 - s_{n-1}^3 = (s_n - s_{n-1})\left(s_n^2 + s_n.s_{n-1} + s_{n-1}^2\right) = x_n^2 \left(s_n^2 + s_n.s_{n-1} + s_{n-1}^2\right) = 3.$$

Nên ta có $\lim \frac{s_n^3}{3n} = 1 \Rightarrow \lim \frac{s_n}{\sqrt[3]{3n}} = 1$.
Do vậy

$$\lim\left(\sqrt[3]{3n}.x_n\right) = \lim\left(\frac{\sqrt[3]{3n}}{s_n}.x_n s_n\right) = 1.$$



2.3 Một số phương pháp tìm giới hạn dãy số

2.3.1 Xác định công thức tổng quát của dãy số

Bài toán 2.1. *Cho dãy* (x_n) *được xác định :*

$$x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2^n} + 2n - 1, \forall n \geqslant 1.$$

Tìm $\lim \frac{x_n}{n^2}$.

Lời giải. Ta có

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2^n} + (2n-1), \forall n \geqslant 1 \qquad (1)$$

Trong (1) thay n bằng $n-1, n-2, ..., 2, 1$ ta có :

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} + 2(n-1) - 1$$
$$x_{n-1} - x_{n-2} = \frac{1}{2^{n-2}} + 2(n-2) - 1$$
....
$$x_2 - x_1 = \frac{1}{2} + 2.1 - 1.$$

Cộng các đẳng thức ta được:

$$x_n = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=1}^{n-1} (2i-1); \forall n \geqslant 2.$$

Mặt khác theo công thức tính tổng n số hạng đầu của CSC và CSN ta có:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (2i-1) = \frac{n-1}{2}[1 + (2n-3)] = (n-1)^2 \text{ và } \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}.\frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Suy ra

$$x_n = 1 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + (n-1)^2 = n^2 - 2n + 3 - \frac{1}{2^{n-1}}, \forall n \geqslant 2.$$

Do đó $\lim \frac{x_n}{n^2} = \frac{1}{2}$. 

Nguyễn Tất Thu

Bài toán 2.2. *Cho dãy số thực xn xác định bởi* $x_0 = 1,\ x_{n+1} = 2 + \sqrt{x_n} - 2\sqrt{1+\sqrt{x_n}}$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$. *Ta xác định dãy yn bởi công thức*

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i 2^i, \quad \forall n \in N^*.$$

Tìm $\lim \frac{y_n}{2^n}$.

Lời giải. Ta có :

$$x_{n+1} = 2 + \sqrt{x_n} - 2\sqrt{1+\sqrt{x_n}} = (\sqrt{1+\sqrt{x_n}} - 1)^2.$$

Từ đó tính được:

$$x_1 = \left(\sqrt{2}-1\right)^2,\ x_2 = \left(\sqrt{\sqrt{2}}-1\right)^2, \dots,\ x_n = \left(2^{1/2^n}-1\right)^2.$$

Ta viết

$$\begin{aligned} &x_1 = 1 + 2 - 2\sqrt{2}, \\ &x_2 = 1 + \sqrt{2} - 2.2^{1/4} \\ &x_3 = 1 + 2^{1/4} - 2.2.^{1/8} \\ &\dots \\ &x_n = 1 + 2^{1/2^{n-1}} - 2.2^{1/2^n} \end{aligned}.$$

Suy ra $y_n = 2 + 4 + \dots + 2^n + 4 - 2^{n+1}.2^{1/2^n} = 2^{n+1}(1 - 2^{1/2^n}) + 2$. Do đó $\lim \frac{y_n}{2^n} = 0$. ■

Bài toán 2.3. *Cho của dãy số* (x_n) *xác định bởi công thức:*

$$x_1 = 2015, x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)x_n + \frac{2014}{(n+1)^2}; \forall n \geqslant 1.$$

Tìm $\lim x_n$.

Lời giải. Ta có $x_{n+1} - 2014 = x_n - 2014 - \frac{x_n - 2014}{(n+1)^2}; \forall n \geqslant 1$ Đặt $y_n = x_n - 2014$ ta có

$$y_1 = 1, y_{n+1} = y_n - \frac{1}{(n+1)^2}y_n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)y_n, \forall n \geqslant 1.$$

Hay

$$y_{n+1} = \frac{(n+2)n}{(n+1)^2}y_n, \forall n \geqslant 1. \tag{1}$$

Trong (1) thay n bằng $n-1, n-2, \dots, 2, 1$ ta được:

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{(n+1)(n-1)}{n^2}y_{n-1} \\ y_{n-1} &= \frac{n(n-2)}{(n-1)^2}y_{n-2} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_2 &= \frac{3.1}{2^2}y_1 \end{aligned}$$

Nhân theo vế các đẳng thức trên rồi giản ước các số hạng bằng nhau ở hai vế, ta được:

$$y_n = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2}.\frac{n(n-2)}{(n-1)^2}.....\frac{3.1}{2^2}y_1 = \frac{n+1}{2n}, \forall n \geqslant 2 \quad (2)$$

Dĩ nhiên (2) cũng đúng với $n = 1$.
Do đó

$$y_n = \frac{n+1}{2n}, \forall n \geqslant 1 \Rightarrow x_n = y_n + 2014 = \frac{4029n+1}{2n}, \forall n \geqslant 1.$$

Vậy $\lim x_n = \frac{4029}{2}$. ■

Bài toán 2.4. *Cho dãy số* (x_n) *xác định bởi công thức:*

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + \frac{2n+1}{3^n}},\ n \geqslant 1 \end{cases}.$$

Tính $\lim x_n$.

Lời giải. Ta có

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + \frac{2n+1}{3^n}}, \forall n \geqslant 1 \Leftrightarrow x_{n+1}^2 - x_n^2 = \frac{2n+1}{3^n}, \forall n \geqslant 1 \quad (*)$$

Trong (1) thay n bằng $n-1, n-2, ..., 2, 1$ ta được:

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 = \frac{2(n-1)+1}{3^{n-1}}$$
$$x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2 = \frac{2(n-2)+1}{3^{n-2}}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_2^2 - x_1^2 = \frac{2.1+1}{3^1}$$

Cộng các đẳng thức trên rồi giản ước các số hạng bằng nhau ở hai vế, ta được:

$$x_n^2 = x_1^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{2i+1}{3^i} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i+1}{3^i}.$$

Đặt $S = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i+1}{3^i}$, ta có

$$\frac{2}{3}S = S - \frac{1}{3}S = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i+1}{3^i} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i+1}{3^{i+1}} = 1 - \frac{2n-1}{3^n} + 2\left(\sum_{i=2}^{n-2} \frac{1}{3^{i+1}}\right) \Rightarrow S = 2 - \frac{n+1}{3^{n-1}}$$

Do đó

$$x_n^2 = 3 - \frac{n+1}{3^{n-1}} \Rightarrow x_n = \sqrt{3 - \frac{n+1}{3^{n-1}}}, \forall n \geqslant 1$$

Ta có

$$3^n = (1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k > 4C_n^2 = 2n(n-1), \forall n \geqslant 2 \Rightarrow 0 < \frac{n+1}{3^n} < \frac{n+1}{2n(n-1)}, \forall n \geqslant 2.$$

Mặt khác $\lim \frac{n+1}{2n(n-1)} = 0 \Rightarrow \lim \frac{n+1}{3^n} = 0$. Từ đó suy ra $\lim x_n = \sqrt{3}$. ■

Nguyễn Tất Thu

Bài toán 2.5. ***(VMO 2013)*** *Cho hai dãy số thực dương $(x_n),(y_n)$ xác định hồi quy bởi $x_1=1, y_1=\sqrt{3}$, và*

$$\begin{cases} x_{n+1}y_{n+1}-x_n=0 \\ x_{n+1}^2+y_n=2 \end{cases},$$

với mọi $n=1,2,\ldots$. Chứng minh rằng hai dãy số hội tụ, và tìm giới hạn của chúng.

Lời giải. Ta có $x_2=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, y_2=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. Từ các giá trị trên gợi ý cho ta đến giá trị lượng giác. Ta có

$$x_1=1=2\sin\frac{\pi}{6},\ x_2=2\sin\frac{\pi}{12}\ \text{ và }\ y_1=\sqrt{3}=2\cos\frac{\pi}{6},\ y_2=2\cos\frac{\pi}{12}$$

Điều này dẫn tới, ta đi chứng minh

$$x_n=2\sin\frac{\pi}{3.2^n}\quad\text{và}\quad y_n=2\cos\frac{\pi}{3.2^n}. \qquad (*)$$

Ta chứng minh (*) bằng phương pháp quy nạp.
Hiển nhiên là (*) đúng với $n=1$.
Giả sử (*) đúng với $k=\overline{1,n}$. Khi đó, ta có

$$x_{n+1}=\sqrt{2-y_n}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{3.2^n}}=\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{3.2^n}\right)}=2\sin\frac{\pi}{3.2^{n+1}}.$$

Và

$$y_{n+1}=\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{3.2^n}}{2\sin\frac{\pi}{3.2^{n+1}}}=2\cos\frac{\pi}{3.2^{n+1}}.$$

Theo nguyên lí quy nạp, ta có (*) đúng.
Vì $\lim\dfrac{\pi}{3.2^n}=0$ nên $\lim x_n=0,\ \lim y_n=2.$ ■

Bài toán 2.6. ***(VMO 2004)*** *Cho dãy*

$$(x_n): x_1=1;\ x_{n+1}=\frac{(2+\cos 2\alpha)x_n+\cos^2\alpha}{(2-2\cos 2\alpha)x_n+2-\cos 2\alpha}.$$

Đặt $y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2x_i+1}\ \forall n\geqslant 1$. Tìm α để dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Ta có

$$\frac{1}{2x_{n+1}+1}=\frac{2\sin^2\alpha}{3}+\frac{1}{3(2x_n+1)}\Rightarrow\frac{1}{2x_n+1}=\frac{1}{3^n}+(1-\frac{1}{3^{n-1}})\sin^2\alpha.$$

Suy ra

$$y_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2x_i+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3^i}+\sin^2\alpha\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{3^{i-1}})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n})+[n-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^n})]\sin^2\alpha.$$

Vì $\lim\dfrac{1}{3^n}=0$ nên dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn $\Leftrightarrow \sin\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=k\pi$. Khi đó $\lim y_n=\dfrac{1}{2}$. ■

Nguyễn Tất Thu

2.3.2 Sử dụng nguyên lí Weierstrass

Bài toán 2.7. *Cho dãy* $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n(3+u_{n-1})+1=0,\ n=1,2,\dots \end{cases}$. *Chứng minh rằng dãy* (u_n) *có giới hạn hữu hạn và tìm* $\lim u_n$.

Lời giải. Ta chứng minh dãy (u_n) giảm và bị chặn dưới. Để có được điều này trước hết ta chứng minh $u_n > \frac{\sqrt{5}-3}{2}$ (1) bằng quy nạp.

• Với $n=1$ ta có $u_1 = 1 > \frac{\sqrt{5}-3}{2}$ nên (1) đúng với $n=1$.

• Giả sử $u_n > \frac{\sqrt{5}-3}{2}$, ta có

$$u_n + 3 > 3 + \frac{\sqrt{5}-3}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Do đó

$$u_{n+1} = \frac{-1}{u_n+3} > \frac{-2}{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-3}{2},$$

suy ra (1) đúng theo nguyên lí quy nạp.
Ta chứng minh dãy (u_n) giảm.
Ta có

$$u_n = -\frac{1}{u_{n-1}+3} \Rightarrow u_n - u_{n+1} = \frac{u_n^2+3u_n+1}{u_n+3} > 0,\ \forall n.$$

do $u_n > \frac{\sqrt{5}-3}{2}$. Suy ra $u_n > u_{n+1},\ \forall n$, dẫn tới dãy (u_n) là dãy giảm.
Do vậy dãy (u_n) tồn tại giới hạn hữu hạn.
Đặt $\lim u_n = x \geqslant \frac{\sqrt{5}-3}{2} \Rightarrow \lim u_{n-1} = x$.
Từ công thức

$$u_n = \frac{-1}{u_{n-1}+3} \Rightarrow x = \frac{-1}{x+3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}-3}{2}.$$

Vậy $\lim u_n = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$. ■

Bài toán 2.8. *Cho* $a > 2$ *và dãy số* (x_n) *với* $x_1 = a$ *và*

$$2x_{n+1} = \sqrt{3x_n^2 + \frac{n+3}{n}}.$$

Chứng minh dãy số (x_n) *có giới hạn và tìm giới hạn đó.*

Lời giải. Ta chứng minh $x_n^2 > 1 + \frac{3}{n}\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Ta có $x_1^2 = a^2 > 4$ nên khẳng định đúng với $n=1$.
Giả sử $x_k > 1 + \frac{3}{k}$ với mọi $k \leqslant n$.
Ta có:

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{4}(3x_n^2 + 1 + \frac{3}{n}) > \frac{1}{4}(4 + \frac{12}{n}) > 1 + \frac{3}{n+1}.$$

Theo nguyên lí quy nạp khẳng định trên được chứng minh.
Ta có:

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\sqrt{3x_n^2 + 1 + \frac{3}{n}} > x_n - \frac{1}{2}\sqrt{3x_n^2 + x_n^2} = 0.$$

Nên dãy (x_n) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên (x_n) có giới hạn hữu hạn.
Đặt $\lim x_n = x$ ta có x là nghiệm của phương trình

$$2x = \sqrt{3x^2 + 1} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $\lim u_n = 1$. ■

Bài toán 2.9. *Cho dãy (a_n) xác định bởi $a_1 = \frac{1}{2}$, và $a_{n+1} = \frac{(n+1)a_n^2}{n(a_n+1)}$. Chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn và tính giới hạn đó.*

Lời giải. Ta có $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1).
Mặt khác $\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{a_n - n}{n(a_n+1)}$ (2).
Suy ra : $\frac{a_2}{a_1} - 1 = \frac{a_1 - 1}{a_1 + 1} < 0$, dẫn tới $a_2 < a_1 < 1$.
Từ đây, bằng quy nạp ta có a_n giảm, bị chặn dưới bởi 0 nên có giới hạn hữu hạn.
Đặt $a = \lim a_n$. Ta chuyển giả thiết về phương trình giới hạn :

$$a = \frac{a^2}{a+1} \Rightarrow a(a+1) = a^2 \Rightarrow a = 0.$$

Vậy a_n có giới hạn hữu hạn và $\lim a_n = 0$. ■

Bài toán 2.10. *Cho dãy số (u_n) xác định bởi* $\begin{cases} u_1 = 2010 \\ {u_n}^2 - 2u_n.u_{n+1} + 2011 = 0, \forall n \geqslant 1 \end{cases}$. *Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn và tính giới hạn đó.*

Lời giải. Trước hết ta nhận xét rằng $u_n > 0$, với mọi n, Thật vậy, ta có $u_1 = 2010 > 0$. Giả sử $u_k > 0, \forall k \geqslant 1$, ta chứng minh $u_{k+1} > 0$.
Từ hệ thức truy hồi suy ra

$$2u_k.u_{k+1} = {u_k}^2 + 2011 > 0 \Rightarrow u_{k+1} = \frac{{u_k}^2 + 2011}{2u_k} > 0.$$

Do đó ta có

$$u_{n+1} = \frac{{u_n}^2 + 2011}{2u_n} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2011}{u_n}).$$

Theo bất đẳng thức Cosi, ta có

$$u_{n+1} = \frac{{u_n}^2 + 2011}{2u_n} \geqslant \sqrt{u_n.\frac{2011}{u_n}} = \sqrt{2011}, \forall n \geqslant 1.$$

Mặt khác ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{{u_n}^2 + 2011}{2{u_n}^2} = \frac{1}{2} + \frac{2011}{2{u_n}^2} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

(vì $u_n \geqslant \sqrt{2011}, \forall n \geqslant 1 \Rightarrow \dfrac{2011}{2u_n{}^2} \leqslant \dfrac{2011}{2.2011} = \dfrac{1}{2}$).
Nên (u_n) là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi $\sqrt{2011}$, do đó dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.
Giả sử $\lim u_n = a$, khi đó $0 < a \leqslant 2010$ và ta có

$$u_{n+1} = \frac{u_n{}^2 + 2011}{2u_n} \Rightarrow \lim u_{n+1} = \lim \frac{u_n{}^2 + 2011}{2u_n} \Rightarrow a = \frac{a^2 + 2011}{2a} \Rightarrow a^2 = 2011 \Rightarrow a = \sqrt{2011}.$$

Vậy $\lim u_n = \sqrt{2011}$. ■

Bài toán 2.11. ***(VMO 2012)*** *Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi :*

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_n = \dfrac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2) \quad \forall n \geqslant 2 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ và tính giới hạn đó.

Lời giải. Rõ ràng ta có $x_n > 0$ với mọi n nguyên dương (1).
Ta sẽ chứng minh kể từ số hạng thứ hai, dãy số đã cho là giảm.
Thật vậy, xét hiệu

$$x_n - x_{n-1} = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2) - x_{n-1} = \frac{2[(n+2) - (n-1)x_{n-1}]}{3n}.$$

Để chứng minh x_n giảm bắt đầu từ số hạng thứ hai, ta chỉ cần chứng minh:

$$(n+2) - (n-1)x_{n-1} < 0 \quad \forall n \geqslant 3 \qquad (2)$$

Ta chứng minh điều này bằng quy nạp toán học.
Với $n = 3$, do $x_2 = \dfrac{10}{3}$ nên bất đẳng thức

$$(n+2) - (n-1)x_{n-1} = 5 - 2.\frac{10}{3} = -\frac{5}{3} < 0 \ \ text(\text{ffl}ó ng).$$

Giả sử ta đã có $(n+2) - (n-1)x_{n-1} < 0$ thì $x_{n-1} > \dfrac{n+2}{n-1}$.
Khi đó :

$$x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2) > \frac{n+2}{3n}\left(\frac{n+2}{n-1} + 2\right) = \frac{n+2}{n-1} > \frac{n+3}{n}.$$

Suy ra $(n+3) - nx_n < 0$.
Vậy (2) đúng đến $n + 1$.
Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có (2) đúng với mọi $n \geqslant 3$.
Như vậy, (x_n) là dãy số giảm kể từ số hạng thứ hai.
Ngoài ra, theo (1), nó bị chặn dưới bởi 0. Suy ra, tồn tại gió hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
Chuyển đẳng thức $x_n = \dfrac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2)$ sang giới hạn, ta được $a = \dfrac{1}{3}(a + 2)$. Từ đó suy ra $a = 1$.
Vậy dãy số đã cho có giới hạn khi n dần tới vô cùng và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. ■

Bài toán 2.12. ***(VMO 2011)*** *Cho dãy (x_n):* $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \dfrac{2n}{(n-1)^2} \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i, \ \forall n \geqslant 2 \end{cases}$. *Chứng minh rằng dãy $(y_n) : y_n = x_{n+1} - x_n$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.*

Nguyễn Tất Thu

Lời giải. Từ giả thiết ta có:

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i = \frac{(n-1)^2}{2n} x_n,$$

suy ra

$$x_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2(n+1)}{n^2}\left(x_n + \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) = \frac{2(n+1)}{n^2}\left(x_n + \frac{(n-1)^2}{2n}x_n\right).$$

Hay

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3} x_n.$$

Do vậy:

$$y_n = x_{n+1} - x_n = \frac{n^2+n+1}{n^3} x_n.$$

Suy ra:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{2x_n}{n^3(n+1)^2} > 0$$

với $\forall n$ do đó dãy (y_n) là dãy tăng.
Mặt khác bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n < 4(n-1)$.
Nên ta có:

$$y_n = \frac{n^2+n+1}{n^3} x_n < \frac{(n^2+n+1)4(n-1)}{n^3} < 4.$$

Suy ra dãy (y_n) bị chặn. Vậy dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn. ■

2.3.3 Sử dụng nguyên lí kẹp

Bài toán 2.13. *Chứng minh rằng:* $\lim a_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1\right) = \frac{1}{4}$.

Lời giải. Dùng đánh giá sau với $x > -1$:

$$\frac{x}{2+x} < \sqrt{1+x} - 1 < \frac{x}{2}.$$

Thay x bởi $\frac{k}{n^2}$ và tính tổng hai vế từ 1 đến n, ta được:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2+k} < \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1\right) < \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k} < s_n < \frac{n(n+1)}{4n^2}.$$

Ta thấy: $\lim \frac{n(n+1)}{4n^2} = \frac{1}{4}$; hơn nữa:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)} < \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^4} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24n^4} \to 0,$$

suy ra:

$$\lim\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}\right) = 0 \Rightarrow \lim\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k} = \lim\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2} = \frac{1}{4}.$$

Theo nguyên lí kẹp, ta có đ¬ược:

$$\lim a_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1\right) = \frac{1}{4}.$$

■

Bài toán 2.14. ***(ĐHSPHN TST 2011)*** *Cho dãy số*

$$(a_n): a_1 = 1, a_n = \frac{2n-3}{2n} a_{n-1}, \forall n \geqslant 2.$$

Đặt $b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, n \geqslant 1$*. Chứng minh rằng* (b_n) *có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.*

Lời giải. Ta có

$$2na_n = (2n-3)a_{n-1} \Leftrightarrow a_{n-1} = 2[(n-1)a_{n-1} - na_n], \forall n \geqslant 2.$$

Do đó

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} 2[ia_i - (i+1)a_{i+1}] = 2[1-(n+1)a_{n+1}].$$

Lại có

$$a_n = \frac{2n-3}{2n} a_{n-1} = \frac{(2n-3)(2n-5)...5.3}{2n(2n-2)...4.2}$$

$$\Rightarrow a_n^2 < \frac{1^2.3^2.5^2...(2n-3)^2}{\left(2^2-1\right)\left(4^2-1\right)...\left((2n-2)^2-1\right)4n^2} = \frac{1}{(2n-1)4n^2}$$

$$\Rightarrow a_n < \frac{1}{2n\sqrt{2n-1}}$$

Suy ra $2\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2n+1}}\right) < 2[1-(n+1)a_{n+1}] = b_n < 2$.

Từ đó, ta có $\lim b_n = 2$. ■

Bài toán 2.15. ***(30/4/2012 Shortlist)*** *Cho hai dãy số* $(u_n), (v_n)$ *xác định bởi:* $u_1 = 2011, v_1 = 2012$ *và*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n v_n}{v_n^2+1} + v_n \sin u_n\right); v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n v_n}{u_n^2+1} + u_n \cos v_n\right)$$

Tính giới hạn của hai dãy đã cho.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski ta có

$$u_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{u_n v_n}{v_n^2+1} + v_n \sin u_n\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}\left(u_n^2+v_n^2\right)\left(\frac{v_n^2}{\left(v_n^2+1\right)^2} + \sin^2 u_n\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\left(u_n^2+v_n^2\right)\left(\frac{1}{4}+1\right) = \frac{5}{16}\left(u_n^2+v_n^2\right)$$

$$v_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{u_n v_n}{u_n^2+1} + u_n \cos v_n\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}\left(v_n^2+u_n^2\right)\left(\frac{u_n^2}{\left(u_n^2+1\right)^2} + \cos^2 v_n\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\left(u_n^2+v_n^2\right)\left(\frac{1}{4}+1\right) = \frac{5}{16}\left(u_n^2+v_n^2\right)$$

Do bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{\left(a^2+1\right)^2} \leqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(a^2-1\right)^2 \geqslant 0.$$

Từ đó suy ra

$$u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 \leqslant \frac{5}{8}\left(u_n^2+v_n^2\right) \Rightarrow \lim\left(u_n^2+v_n^2\right) = 0 \Rightarrow \lim u_n = \lim v_n = 0.$$

■

Bài toán 2.16. ***(T11/422 THTT)*** *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi*

$$u_0 = a \in [0;2);\, u_n = \frac{u_{n-1}^2 - 1}{n}, \forall n = 1,2,...$$

Tìm giới hạn $\lim\left(u_n\sqrt{n}\right)$.

Lời giải. Ta chỉ ra rằng luôn tìm được số hạng thứ k nào đó của dãy mà $u_k \in [-1;1]$.
Thật vậy, nếu $a \in (0;1]$ thì $u_0 = a \in (0;1] \subset [-1;1]$.
Xét trường hợp $a \in (1;2)$, tức $u_0 \in (1;2)$.
Nếu xảy ra trường hợp mọi $u_n \notin [-1;1]$ thì từ hệ thức
$u_n = \dfrac{u_{n-1}^2 - 1}{n}$, suy ra $u_n > 1, \forall n \geqslant 1$.
Để ý rằng

$$\frac{n+2-u_n}{n+1-u_{n-1}} = \frac{n+1+u_{n-1}}{n} > \frac{n+1}{n},$$

tức là

$$\frac{k+2-u_k}{k+1-u_{k-1}} > \frac{k+1}{k}, k = 1,2,...,n$$

Nhân theo vế của n bất đẳng thức trên với $k = 1,2,...,n$ ta thu được

$$\frac{n+2-u_n}{2-u_0} > \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\Rightarrow u_n < n+2-(2-u_0)\frac{(n+1)(n+2)}{2} = (n+1)(n+2)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2-u_0}{2}\right)$$

Điều này là không thể, vì khi n đủ lớn $\left(n > \dfrac{u_0}{2-u_0}\right)$ thì vế trái là số dương còn vế phải là số âm. Vậy luôn tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $u_k \in [-1;1]$.
Khi đó theo hệ thức $u_n = \dfrac{u_{n-1}^2 - 1}{n}$, suy ra

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{n}, \forall n > k.$$

Do đó

$$\left|u_n\sqrt{n}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n > k.$$

Suy ra $\lim\left(u_n\sqrt{n}\right) = 0$. ■

Bài toán 2.17. *Cho $a > 0$. Xác định dãy số*

$$(x_n): x_0 = a, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2}, \forall n \geqslant 0.$$

Tìm giới hạn $\lim \dfrac{x_n}{\sqrt[3]{n}}$.

Lời giải. Ta có

$$x_{k+1}^3 = \left(x_k + \frac{1}{x_k^2}\right)^3 = x_k^3 + 3 + \frac{3}{x_k^3} + \frac{1}{x_k^6} > x_k^3 + 3,$$

suy ra

$$x_n^3 > x_0^3 + 3n, \forall n \geqslant 1 \quad (1)$$

Từ (1) suy ra

$$x_{k+1}^3 < x_k^3 + 3 + \frac{3}{x_0^3 + 3k} + \frac{1}{\left(x_0^3 + 3k\right)^2} < x_k^3 + 3 + \frac{1}{k} + \frac{1}{9k^2}$$

$$\Rightarrow x_n^3 < x_1^3 + 3(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow x_n^3 < x_1^3 + 3n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad (2)$$

Ta có

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2 \qquad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta được

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2n \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \sqrt{2n} \qquad (4)$$

Từ (1),(2),(3) và (4) suy ra

$$\frac{x_0^3}{n} + 3 < \frac{x_n^3}{n} < \frac{x_1^3}{n} + 3 + \sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{2}{9n}$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \to +\infty$, theo SLT ta được

$$\lim \frac{x_n^3}{n} = 3 \Rightarrow \lim \frac{x_n}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{3}.$$

■

Bài toán 2.18. ***(T9/405. THTT)*** *Cho $k \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}$. Xét dãy số*

$$(a_n) : a_n = \frac{[1^k.\alpha] + [2^k.\alpha] + \ldots + [n^k.\alpha]}{n^{k+1}}, \forall n = 1, 2, \ldots$$

Trong đó $[x]$ là kí hiệu phần nguyên của x. Tìm $\lim a_n$.

Lời giải. Ta có $x - 1 < [x] \leqslant x$ nên

$$\frac{\alpha\left(1^k + 2^k + \ldots + n^k\right)}{n^{k+1}} - \frac{1}{n^k} < a_n \leqslant \frac{\alpha\left(1^k + 2^k + \ldots + n^k\right)}{n^{k+1}}.$$

Lại có

$$\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

với $f(x) = x^k$.

Theo định nghĩa tích phân xác định thì

$$\lim \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^k\,dx = \frac{1}{k+1}$$

Do đó theo SLT thì $\lim a_n = \dfrac{\alpha}{k+1}$. ■

Nguyễn Tất Thu

Bài toán 2.19. *Cho dãy số* $(x_n): x_0 = -2, x_n = \dfrac{1-\sqrt{1-4x_{n-1}}}{2}, \forall n \geqslant 1$. *Đặt*

$$y_n = \left(1+x_0^2\right)\left(1+x_1^2\right)\ldots\left(1+x_n^2\right), \forall n \geqslant 0.$$

Chứng minh rằng (y_n) *có giới hạn hữu hạn.*

Lời giải. Từ phương trình truy hồi của dãy suy ra

$$\sqrt{1-4x_{n-1}} = 1-2x_n \Rightarrow x_n^2 = x_n - x_{n-1}$$

Do đó

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = x_0^2 + x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \ldots + x_n - x_{n-1} = x_0^2 - x_0 = 6.$$

Dễ thấy (y_n) là dãy tăng.
Áp dụng bất đẳng thức $\ln(1+x) < x, \forall x > 0$, ta có

$$\ln y_n = \ln\left(1+x_0^2\right)\left(1+x_1^2\right)\ldots\left(1+x_n^2\right)$$

$$= \ln\left(1+x_0^2\right) + \ln\left(1+x_1^2\right) + \ldots + \ln\left(1+x_n^2\right) < x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 6.$$

Vậy (y_n) bị chặn, do đó (y_n) hội tụ. ■

2.3.4 Xây dựng dãy phụ

Bài toán 2.20. *Cho* $a, b \in (0;1)$. *Dãy số* (u_n) *xác định bởi*

$$u_0 = a, u_1 = b, u_{n+2} = \frac{1}{2014}u_{n+1}^4 + \frac{2013}{2014}\sqrt[4]{u_n}, n = 0,1,2\ldots$$

Chứng minh dãy (u_n) *có giới hạn và tính giới hạn đó.*

Lời giải. Xét

$$(v_n): v_0 = \min(a,b),\ v_{n+1} = \frac{1}{2014}v_n^4 + \frac{2013}{2014}\sqrt[4]{v_n}, n \geqslant 0$$

Ta chứng minh được $\lim v_n = 1$. Ta sẽ chứng minh $v_n \leqslant \min(u_{2n}, u_{2n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$ bằng qui nạp (*).
Thật vậy , (*) đúng khi $n = 0$ theo định nghĩa của dãy (v_n).
Giả sử $v_n \leqslant \min(u_{2n}, u_{2n+1})$, ta sẽ chứng minh

$$v_{n+1} \leqslant \min(u_{2n+2}; u_{2n+3}).$$

Ta có:

$$u_{2n+2} = \frac{1}{2014}u_{2n+1}^4 + \frac{2013}{2014}\sqrt[4]{u_{2n}} \geqslant \frac{1}{2014}v_n^4 + \frac{2013}{2014}\sqrt[4]{v_n} = v_{n+1}$$
$$u_{2n+3} = \frac{1}{2014}u_{2n+2}^4 + \frac{2013}{2014}\sqrt[4]{u_{2n+1}} \geqslant \frac{1}{2014}v_{n+1}^2 + \frac{2013}{2014}\sqrt[4]{v_n} > \frac{1}{2014}v_n^2 + \frac{2013}{2014}\sqrt[4]{v_{n+1}} = v_{n+1}$$

(do $v_{n+1} > v_n$). Suy ra $v_{n+1} \leqslant \min(u_{2n+2}, u_{2n+3})$.
Vậy (*) đúng với mọi $n \Rightarrow v_n \leqslant u_{2n} < 1, v_n \leqslant u_{2n+1} < 1, \forall n$. Mà $\lim v_n = 1 \Rightarrow \lim u_n = 1$. ■

Nguyễn Tất Thu

Bài toán 2.21. *Cho dãy số không âm* (u_n) *thỏa mãn*

$$4u_{n+2} \leqslant \left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right)u_{n+1}+\left(\frac{1}{n+n}+...\frac{1}{n+3n}\right)u_n.$$

Chứng minh dãy (u_n) *có giới hạn và tìm giới hạn đó.*

Lời giải. Ta có

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}<\frac{n}{n+1}<1, \frac{1}{n+n}+...\frac{1}{n+3n}<\frac{2n+1}{2n}\leqslant\frac{3}{2}.$$

Suy ra

$$u_{n+2}<\frac{1}{4}u_{n+1}+\frac{3}{8}u_n.$$

Xét dãy (v_n) thỏa mãn

$$v_1=u_1, v_2=u_2, v_{n+2}=\frac{1}{4}v_{n+1}+\frac{3}{8}v_n, n\geqslant 1.$$

Giải PT đặc trưng ta được

$$v_n=c_1\left(\frac{3}{4}\right)^n+c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \lim v_n=0.$$

Tiếp theo ta chứng minh $v_n \geqslant u_n \geqslant 0$ theo qui nạp.
Giả sử khẳng định đúng đến $k+1$ khi đó suy ra

$$v_{k+2}=\frac{1}{4}v_{k+1}+\frac{3}{8}v_k \geqslant \frac{1}{4}u_{k+1}+\frac{3}{8}u_k=u_{k+2}.$$

Từ đây suy ra $\lim u_n=0$. ■

Bài toán 2.22. *Cho dãy* (u_n) *thỏa mãn*

$$u_1=1, u_2=\frac{2}{3}, u_{n+2}<\frac{1}{4}u_{n+1}^2+\frac{3}{4}u_n, n=1,2,...$$

Chứng minh dãy (u_n) *có giới hạn và tìm giới hạn đó.*

Lời giải. Xét dãy hai (v_n) và (z_n) xác định bởi

$$v_1=1, v_2=\frac{2}{3}, v_{n+2}=\frac{1}{4}v_{n+1}^2+\frac{3}{4}v_n, n\geqslant 1$$
$$z_1=\frac{31}{36}, z_{n+1}=\frac{1}{4}z_n^2+\frac{3}{4}z_n, n\geqslant 1.$$

Ta chứng minh $z_n \geqslant \max(v_{2n}, v_{2n+1}), \forall n \geqslant 1$ (*).
Ta có $\max(v_2, v_3)=\max\left(\frac{2}{3}, \frac{31}{36}\right)=\frac{31}{36}=z_1$ nên (*) đúng khi $n=1$.
Giả sử $z_n \geqslant \max(v_{2n}, v_{2n+1})$. Ta có

$$v_{2n+2}=\frac{1}{4}v_{2n+1}^2+\frac{3}{4}v_{2n} \leqslant \frac{1}{4}z_n^2+\frac{3}{4}z_n=z_{n+1}$$
$$v_{2n+3}=\frac{1}{4}v_{2n+2}^2+\frac{3}{4}v_{2n+1} \leqslant \frac{1}{4}z_{n+1}^2+\frac{3}{4}z_n<\frac{1}{4}z_n^2+\frac{3}{4}z_n=z_{n+1}$$

(do $z_{n+1} < z_n$). Vậy

$$z_{n+1} \geqslant \max(v_{2n+2}, v_{2n+3}) \Rightarrow 0 < v_{2n} \leqslant z_n, 0 < v_{2n+1} \leqslant z_n, \forall n \geqslant 1.$$

Ta chứng minh $\lim z_n = 0$.
Thật vậy , $4(z_{n+1} - z_n) = z_n(z_n - 1) < 0 \Rightarrow (z_n)$ giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên có giới hạn hưũ hạn $\lim z_n = L \in [0;1) \Rightarrow L = \frac{1}{4}L^2 + \frac{3}{4}L \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} L = 0 \\ L = 1(L) \end{array}\right.$.
Từ đó $\lim z_n = 0 \Rightarrow \lim v_n = 0$.
Tiếp theo ta chứng minh $0 < u_n \leqslant v_n, \forall n$ (2).
Hiển nhiên (2) đúng theo cách định nghĩa của dãy (v_n).
Giả sử (2) đúng đến $n+1 \Rightarrow u_{n+2} < \frac{1}{4}u_{n+1}^2 + \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{1}{4}v_{n+1}^2 + \frac{3}{4}v_n = v_{n+2}$.
Theo qui nạp suy ra (2) đúng với mọi n. Từ $0 < u_n \leqslant v_n, \forall n, \lim v_n = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0$. ■

Bài toán 2.23. *Cho dãy số (u_n) thỏa: $u_n + u_{n+1} \geqslant 2u_{n+2}$ và dãy (u_n) bị chặn. Chứng minh rằng dãy (u_n) tồn tại giới hạn hữu và tìm giới hạn đó.*

Lời giải. Xét dãy $(v_n): v_n = \max\{u_n, u_{n+1}\}$, ta có dãy (v_n) bị chặn.
Từ giả thiết ta suy ra:

$$\max\{u_n, u_{n+1}\} \geqslant u_{n+2} \Rightarrow \max\{u_n, u_{n+1}\} \geqslant \max\{u_{n+1}, u_{n+2}\}.$$

Do đó dãy (v_n) là dãy số giảm, từ đó suy ra tồn tại $\lim v_n = l$.
Ta chứng minh: $\lim u_n = l$.
Vì $\lim v_n = l$ nên với mọi $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, luôn tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}*$ sao cho:

$$|v_n - l| < \frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow l - \frac{\varepsilon}{3} < v_n < l + \frac{\varepsilon}{3},\ \forall n > n_0.$$

Với mọi $k > n_0 + 1$ ta có:

$$v_{k-1} = \max\{u_{k-1}, u_k\} < l + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Suy ra $u_{k-1} < l + \frac{\varepsilon}{3}$ (*).
Ta xét các trường hợp sau:

- $u_k > l - \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow l - \frac{\varepsilon}{3} < u_k \leqslant v_k < l + \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |u_k - l| < \frac{\varepsilon}{3}$.
- $u_k \leqslant l - \frac{\varepsilon}{3}$, suy ra $u_{k+1} > l - \frac{\varepsilon}{3}$.

Khi đó:

$$u_k \geqslant 2u_{k+1} - u_{k-1} > 2\left(l - \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(l + \frac{\varepsilon}{3}\right) = l - \varepsilon.$$

Dẫn tới:

$$l - \varepsilon < u_k \leqslant v_k < l + \frac{\varepsilon}{3} < l + \varepsilon \Rightarrow |u_k - l| < \varepsilon.$$

Vậy $\lim u_n = l$. ■

2.3.5 Giới hạn của dãy $u_n = f(u_n)$

Với dãy số $(u_n): u_{n+1} = f(u_n)$ ta thường dựa vào các tính chất sau

Định nghĩa 2.5. *Cho hàm $f : I \to \mathbb{R}$. Nếu hàm số f* **co** *trên I, nếu tồn tại số thực k, $0 < k < 1$ sao cho*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| \quad \forall x \in I.$$

Định lí 2.8. *Nếu hàm $f : I \to \mathbb{R}$ là một hàm co trên I. Khi đó, dãy $(u_n) : u_{n+1} = f(u_n)$ hội tụ đến x với x là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = x$.*

Từ định lí trên, kết hợp với định lí Lagrang ta có kết quả sau

Định lí 2.9. *Cho dãy $(u_n) : u_{n+1} = f(u_n)$, với f là hàm xác định trên I. Nếu $|f'(x)| < 1$ $\forall x \in I$ thì dãy (u_n) hội tụ.*

Bài toán 2.24. *Dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $1 < x_1 < 2$ và $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2}x_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số đã cho hội tụ. Tìm $\lim x_n$.*

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2$, với $x \in (1;2)$. Ta có

$$f'(x) = 1 - x < 0 \ \forall x \in (1;2) \Rightarrow f(x) \in (1;2) \quad \forall x \in (1;2).$$

Từ đó, ta có $|f'(x)| < 1$ $\forall x \in (1;2)$. Mà dãy $(u_n) : u_{n+1} = f(u_n)$ nên dãy (u_n) hội tụ. Đặt $\lim x_n = x$, khi đó $x$là nghiệm của phương trình

$$x = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \ \text{ do } \ x \in (1;2).$$

■

Bài toán 2.25. *Cho $(x_n) : x_1 = 2014, x_{n+1} = \frac{\pi}{8}\left(\cos x_n + \frac{\cos 2x_n}{2} + \frac{\cos 3x_n}{3}\right)$. Chứng minh dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn.*

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = \frac{\pi}{8}\left(\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ có $f'(x) = \frac{\pi}{8}(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)$.
Ta có

$$\begin{aligned}(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^2 &= (2\sin 2x \cos x + \sin 2x)^2\\ &= 4(\sin 2x \cos x + \cos x \sin x)^2 \leqslant 4\left(\sin^2 2x + \cos^2 x\right)\\ &= 4\left(\frac{25}{16} - \left(\cos 2x - \frac{1}{4}\right)^2\right) \leqslant \frac{25}{4}\\ &\Rightarrow \left|f'(x)\right| = \frac{\pi}{8}|\sin x + \sin 2x + \sin 3x| \leqslant \frac{\pi}{8}.\frac{5}{2} = \frac{5\pi}{16} < 1\end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ có

$$g'(x) = f'(x) - 1 < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \text{ và } g(0) = \frac{11\pi}{4} > 0, \ \ g\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}\right) < 0$$

nên phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$. Theo định lí lagarange, tồn tại β soa cho

$$\begin{aligned}f(x_n) - f(\alpha) &= f'(\beta)(x_n - \alpha)\\ &\Rightarrow |x_{n+1} - \alpha| = \left|f'(\beta)\right| |x_n - \alpha| \leqslant \frac{5\pi}{16}|x_n - \alpha|\end{aligned}$$

Áp dụng qui nạp suy ra

$$0 \leqslant |x_{n+1}-\alpha| \leqslant \left(\frac{5\pi}{16}\right)^n |u_1-\alpha|.$$

Do $\lim\left(\frac{5\pi}{16}\right)^n = 0$ suy ra $\lim x_n = \alpha$. ■

Bài toán 2.26. ***(VMO 2000)*** *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau:*

$$x_0 = 0, x_{n+1} = \sqrt{c-\sqrt{c+x_n}}, n = 0,1,2,...$$

Tìm tất cả các giá trị của c để với mọi giá trị $x_0 \in (0,c)$, x_n xác định với mọi n và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim x_n$.

Lời giải. Ta có $x_1 = \sqrt{c-\sqrt{c+x_0}}$. Do đó x_1 tồn tại khi

$$c-\sqrt{c+x_0} \geqslant 0 \Leftrightarrow c(c-1) \geqslant x_0. \quad (1)$$

Vì (1) đúng với mọi $x_0 \in (0;c)$ nên ta có $c \geqslant 2$ và khi đó $0 < x_1 < \sqrt{c}$. Giả sử $0 < x_n < \sqrt{c}$, ta có x_{n+1} tồn tại và $0 < x_{n+1} < \sqrt{c}$. Do đó x_n tồn tại khi $c \geqslant 2$.
Xét hàm số $f(x) = \sqrt{c-\sqrt{c+x}},\ x \in (0;\sqrt{c})$. Ta có

$$f'(x) = -\frac{1}{4\sqrt{(c+x)(c-\sqrt{c+x})}}.$$

Vì $x \in (0;\sqrt{c})$ nên ta có

$$(c+x)(c-\sqrt{c+x}) > c(c-\sqrt{c+\sqrt{c}}) \geqslant 2(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}) > \frac{1}{4}.$$

Suy ra $|f'(x)| \leqslant q < 1 \ \ \forall x \in (0;\sqrt{c})$. Do đó dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn.
Vậy $c \geqslant 2$ là những giá trị cần tìm. ■

Ngoài ra để xét tính hội tụ của dãy (u_n) ta còn dựa vào tính đơn điệu của hàm số f. Cụ thể:

Định lí 2.10. *Cho hàm $f : D \to D$ và dãy $(u_n) : u_{n+1} = f(u_n)$. Khi đó*

- *Nếu f là hàm đồng biến trên D thì dãy (u_n) là dãy tăng nếu $u_1 > u_0$ và là dãy giảm nếu $u_1 < u_0$.*
- *Nếu f là hàm nghịch biến trên D thì hai dãy (u_{2n}) và (u_{2n+1}) là hai dãy đơn điệu ngược chiều nhau. Khi đó nếu dãy (u_n) bị chặn thì tồn tại $\lim u_{2n} = x$, $\lim u_{2n+1} = y$ với x, y là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(x) \end{cases}$. Dãy (u_n) hội tụ khi và chỉ khi $x = y$.*

Bài toán 2.27. ***(Vũng Tàu 2013)*** *Cho dãy số (x_n) xác định bởi*

$$\begin{cases} x_1 = 2013 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+8}{2(x_n-1)},\ n \in \mathbb{N}* \end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó .

Lời giải. Trước hết chứng minh $x_n > 4,\ \forall n \in \mathbb{N}*$.
Ta có $x_1 = 2013 > 4, x_2 = 1007 + \dfrac{9}{4024} > 4$.
Giả sử $x_n > 4$, ta chứng minh

$$x_{n+1} > 4 \Leftrightarrow \frac{x_n^2+8}{2(x_n-1)} > 4 \Leftrightarrow x_n^2 - 8x_n + 16 > 0 \Leftrightarrow (x_n-4)^2 > 0.$$

Điều này luôn đúng. Từ đó ta có $x_n > 4,\ \forall n \in \mathbb{N}*$.
Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+8}{2(x-1)}$ với $x > 4$, ta có

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-8}{2(x-1)^2} > 0,\ \forall x > 4.$$

Mặt khác $x_{n+1} = f(x_n)$ và $x_1 > x_2$ nên suy ra dãy (x_n) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 1. Do đó, dãy (x_n) tồn tại giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim x_n = x \geqslant 4$, ta có

$$x = \frac{x^2+8}{2(x-1)} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy $\lim x_n = 4$. ■

Bài toán 2.28. ***(VMO 2013)****Cho dãy (a_n) được xác định bởi $a_1 = 1$ và*

$$a_{n+1} = 3 - \frac{a_n+2}{2^{a_n}}\ \forall n \geqslant 1.$$

Chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = 3 - \dfrac{x+2}{2^x}$ với $x \in (1;2)$, ta có

$$f'(x) = \frac{(x+2)\ln 2 - 1}{2^x} > 0,\ \forall x \in (1;2).$$

Suy ra f là hàm đồng biến trên $(1;2)$ và

$$1 < \frac{3}{2} = f(1) < f(x) < f(2) = 2\ \forall x \in (1;2).$$

Ta có $a_2 = \dfrac{3}{2} \in (1;2)$ và $a_2 > a_1$, suy ra dãy (a_n) là dãy tăng và $a_n \in (1;2)\ \forall n \geqslant 2$. Nên dãy (a_n) hội tụ. Đặt $\lim a_n = x,\ x \in [1;2]$ thì x là nghiệm của phương trình

$$x = 3 - \frac{x+2}{2^x} \Leftrightarrow x + \frac{x+2}{2^x} - 3 = 0.$$

Xét hàm số $g(x) = x + \dfrac{x+2}{2^x} - 3,\ x \in [1;2]$ ta có

$$g'(x) = \frac{2^x + 1 - (x+2)\ln 2}{2^x},\ x \in [1;2].$$

Hàm số $h(x) = 2^x - x - 1,\ x \in [1;2]$ có

$$h'(x) = 2^x \ln 2 - 1 > 0\ \in [1;2]$$

nên

$$h(x) \geqslant h(1) = 0 \Rightarrow 2^x + 1 \geqslant x + 2 \ \forall x \in [1;2].$$

Mà $\ln 2 < 1$ nên

$$2^x + 1 \geqslant x + 2 > (x+2)\ln 2 \ \forall x \in [1;2]$$

hay $g'(x) > 0 \ \forall x \in [1;2]$.
Suy ra phương trình $h(x) = 0$ có duy nhất nghiệm $x = 2$ trên $[1;2]$.
Vậy $\lim a_n = 2$. ■

Bài toán 2.29. *Cho* (x_n) *xác định bởi*

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 4x_n + 1}{x_n^2 + x_n + 1}; n \geqslant 1.$$

Chứng minh (x_n) *có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.*

Lời giải. Dễ thấy $x_n > 0, \forall n$, và

$$x_{n+1} = 1 + \frac{3x_n}{x_n^2 + x_n + 1} = 2 - \frac{(x_n - 1)^2}{x_n^2 + x_n + 1} \Rightarrow x_n \in [1;2], \forall n.$$

Xét $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 1}; x \in [1;2]$, ta có

$$f'(x) = \frac{3\left(1 - x^2\right)}{\left(x^2 + x + 1\right)} \leqslant 0; \forall x \in [1;2] \ \left(f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1\right)$$

nên hàm số nghịch biến trên $[1;2]$.
Ta thấy $x_1 < x_3$ nên (x_{2n+1}) tăng và bị chặn trên bởi 2 , còn (x_{2n}) giảm và bị chặn dưới bởi 1. Do đó chúng có giới hạn hữu hạn. Giả sử $\lim x_{2n} = a, \lim x_{2n+1} = b; a, b \in [1;2]$; ta có hệ

$$\begin{cases} a = f(b) \\ b = f(a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a - b)\left[1 - \frac{3(ab - 1)}{\left(a^2 + a + 1\right)\left(b^2 + b + 1\right)}\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} a = b \\ \left(a^2 + a + 1\right)\left(b^2 + b + 1\right) = 3(ab - 1)(2) \end{array}\right.$$

Do

$$a, b \in [1;2] \Rightarrow 3(ab - 1) \leqslant 9 \leqslant \left(a^2 + a + 1\right)\left(b^2 + b + 1\right)$$

nên $(2) \Leftrightarrow a = b = 1$(loại).
Do (x_{2n+1}) tăng nghiêm ngặt và $x_1 = 1 \Rightarrow b > 1$)
Vậy

$$a = b = t \Rightarrow t = \frac{t^2 + 4t + 1}{t^2 + t + 1} \Leftrightarrow t^3 - 3t = 1.$$

Từ đây tìm được $\lim x_n = 2\cos\dfrac{\pi}{9}$.

■

Bài toán 2.30. ***(Bắc Ninh 2013)*** *Cho dãy số* (u_n) *xác định bởi* $u_1 = 1$; $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} + \dfrac{\sqrt{3}}{u_n^2}$, $n \geqslant 1$. *Chứng minh rằng dãy số* (x_n) *không có giới hạn hữu hạn.*

Nguyễn Tất Thu

Lời giải. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{\sqrt{3}}{x^2}$, $x>0$. Ta có $u_{n+1}=f(u_n)$ với $u_1=1$ có

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2}-\frac{2\sqrt{3}}{x^3}<0,\ \forall x>0.$$

Mặt khác $u_2=2+\sqrt{3},\ u_3=-8+5\sqrt{3}$ nên

$$u_3<u_1<u_2\Rightarrow\begin{cases}u_4=f(u_3)>f(u_1)=u_2\\u_5=f(u_4)<f(u_2)=u_3\end{cases}.$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được dãy $\{u_{2n}\}$ tăng và $\{u_{2n+1}\}$ là dãy giảm với $n\geqslant 1$.
Do đó $1=u_1>u_3>u_5>.....$ và $2+\sqrt{3}=u_2<u_4<u_6<.....$
Giả sử dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim u_n=x$. Suy ra $\lim u_{2n}=\lim u_{2n+1}=x$. Theo đánh giá trên ta có

$$\begin{cases}\lim u_{2n}=x<1\\\lim u_{2n+1}=x>2+\sqrt{3}\end{cases}\text{(vô lí).}$$

Vậy dãy (u_n) không có giới hạn hữu hạn. ■

2.3.6 Giới hạn của một tổng

Bài toán 2.31. *Cho dãy số (u_n) được xác định như sau*

$$\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=\sqrt{u_n(u_n+1)(u_n+2)(u_n+3)+1};\ n=1,2,..\end{cases}.$$

Đặt $v_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{u_i+2}$. Tìm $\lim v_n$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=\sqrt{(u_n^2+3u_n)(u_n^2+3u_n+2)+1}\\&=\sqrt{(u_n^2+3u_n+1)^2}\\&=u_n^2+3u_n+1.\end{aligned}$$

Suy ra

$$u_{n+1}+1=(u_n+1)(u_n+2)\Rightarrow\frac{1}{u_{n+1}+1}=\frac{1}{u_n+1}-\frac{1}{u_n+2}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{u_n+1}-\frac{1}{u_{n+1}+1}.$$

Do đó, suy ra

$$v_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{u_i+1}-\frac{1}{u_{i+1}+1}\right)=\frac{1}{u_1+1}-\frac{1}{u_{n+1}+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{u_{n+1}+1}.$$

Mặt khác, từ $u_{n+1}=u_n^2+3u_n+1$ ta suy ra $u_{n+1}>3^n$. Nên $\lim\dfrac{1}{u_{n+1}+1}=0$.
Vậy $\lim v_n=\dfrac{1}{2}$. ■

Nguyễn Tất Thu

Bài toán 2.32. *Cho* (x_n) *xác định bởi* $x_1 = 5, x_{n+1} = x_n^2 - 2, \forall n \geqslant 1$. *Tính*

$$A = \lim\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1x_2} + ... + \frac{1}{x_1x_2....x_n}\right).$$

Lời giải. Ta có dãy (x_n) là dãy tăng và không bị chặn nên $\lim x_n = +\infty$ Mặt khác:

$$x_{n+1}^2 - 4 = x_n^2\left(x_n^2 - 4\right) = x_n^2...x_1^2\left(x_1^2 - 4\right) = 21x_n^2...x_1^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_{n+1}}{x_1x_2...x_n}\right)^2 = 21 + \frac{4}{(x_1x_2...x_n)^2}.$$

Suy ra

$$\lim\frac{x_{n+1}}{x_1x_2...x_n} = \sqrt{21}.$$

Lại có

$$\frac{1}{x_1x_2...x_k} = \frac{x_k^2 - x_{k+1}}{2x_1x_2...x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_k}{x_1x_2...x_{k-1}} - \frac{x_{k+1}}{x_1x_2...x_k}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1x_2} + ... + \frac{1}{x_1x_2...x_n} = \frac{1}{2}\left(x_1 - \frac{x_{n+1}}{x_1x_2...x_n}\right)$$

Do đó

$$\lim\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1x_2} + ... + \frac{1}{x_1x_2....x_n}\right) = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}.$$

■

Bài toán 2.33. ***(VMO 2009)*** *Cho dãy*

$$(x_n): \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_n = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}\right),\ \forall n \geqslant 2 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy (y_n) *xác định bởi* $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^2}$ *có giới hạn và tìm giới hạn đó.*

Lời giải. Ta có $x_n > 0\ \forall n$ nên

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} - x_{n-1}\right) = \frac{1}{2}\frac{x_{n-1}^2 + 3x_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}} > 0.$$

Nên dãy (x_n) là dãy tăng. Giả sử dãy (x_n) bị chặn trên, suy ra tồn tại $\lim x_n = x > 0$.
Ta có phương trình $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2 + 4x} + x\right) \Leftrightarrow x = 0$ (vô lí).
Do vậy, ta có được $\lim x_n = +\infty$.
Từ công thức truy hồi, ta có được

$$(2x_n - x_{n-1})^2 = x_{n-1}^2 + 4x_{n-1} \Leftrightarrow x_n^2 = (x_n + 1)x_{n-1}.$$

Dẫn tới

$$\frac{1}{x_{n-1}} = \frac{x_n + 1}{x_n^2} = \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{x_n} \Rightarrow \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\ \forall n \geqslant 2.$$

Suy ra

$$y_n = \frac{1}{x_1^2} + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\right) + ... + \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right) = 6 - \frac{1}{x_n}.$$

Mà

$$\lim x_n = +\infty \Rightarrow \lim\frac{1}{x_n} = 0.$$

Vậy $\lim y_n = 6$. ■

Nguyễn Tất Thu

2.4 Dãy số sinh bởi phương trình

Ví dụ 2.15

Ký hiệu x_n là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\ldots+\frac{1}{x-n}=0$$

thuộc khoảng $(0,1)$

1. Chứng minh dãy x_n hội tụ
2. Hãy tìm giới hạn đó.

Lời giải. Rõ ràng x_n được xác định một cách duy nhất, $0<x_n<1$. Ta có

$$f_{n+1}(x_n)=f_n(x_n)+\frac{1}{x_n-n-1}=\frac{1}{x_n-n-1}<0,$$

trong khi đó $f_{n+1}\left(0^+\right)>0$. Theo tính chất của hàm liên tục, trên khoảng $(0,x_n)$ có ít nhất 1 nghiệm của $f_{n+1}(x)$. Nghiệm đó chính là x_{n+1}. Như thế ta đã chứng minh được $x_{n+1}<x_n$. Tức là dãy số x_n giảm. Do dãy này bị chặn dưới bởi 0 nên dãy số có giới hạn.
Ta sẽ chứng minh giới hạn nói trên bằng 0. Để chứng minh điều này, ta cần đến kết quả quen thuộc sau:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>\ln(n).$$

(Có thể chứng minh dễ dàng bằng cách sử dụng đánh giá $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$) Thật vậy, giả sử $\lim x_n=a>0$. Khi đó, do dãy số giảm nên ta có $x_n\geqslant a$ với mọi n.
Do

$$\lim\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$$

nên tồn tại N sao cho với mọi $n\geqslant N$ ta có

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}>\frac{1}{a}.$$

Khi đó với $n\geqslant N$ ta có :

$$0=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_n-1}+\ldots+\frac{1}{x_n-n}<\frac{1}{x_n}+\frac{1}{-1}+\frac{1}{-2}+\ldots+\frac{1}{-n}<\frac{1}{a}-\frac{1}{a}=0.$$

Mâu thuẫn. Vậy ta phải có $\lim x_n=0$. ■

Ví dụ 2.16

(VMO-2007) Cho số thực $a>2$. Đặt

$$f_n(x)=a^{10}x^{n+10}+x^n+\ldots+x^2+x+1$$

với $n=1,2,\ldots$. Chứng minh rằng với mỗi n, phương trình $f_n(x)=a$ có đúng một

nghiệm $x_n \in (0;+\infty)$ và dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$.

Lời giải. Đặt $g_n(x) = f_n(x) - a, n = 1,2,...$thì $g_n(x)$ liên tục và tăng trên $[0;+\infty)$. $g_n(0) = 1 - a < 0, g_n(1) = a^{10} + n + 1 - a > 0$ nên $g_n(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên $(0;+\infty)$. Ta có

$$\begin{aligned} g_n\left(1-\frac{1}{a}\right) &= a^{10}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{n+10} + \frac{1-\left(1-\frac{1}{a}\right)^{n+1}}{\frac{1}{a}} - a \\ &= a\left(1-\frac{1}{a}\right)^{n+1}\left(a^9\left(1-\frac{1}{a}\right)^9 - 1\right) \\ &= a\left(1-\frac{1}{a}\right)^{n-1}\left((a-1)^9 - 1\right) > 0 \\ &\Rightarrow x_n < 1 - \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$g_{n+1}(x_n) = x_n g_n(x_n) + 1 + a x_n - a = 1 + a x_n - a < 0$$

(do $x_n < 1 - \frac{1}{a}$).
Mà $g_{n+1}(x)$ là hàm tăng và

$$g_{n+1}(x_n) < 0 = g_{n+1}(x_{n+1}) \Rightarrow x_n < x_{n+1}.$$

Vậy dãy (x_n) tăng và bị chặn trên nên có giới hạn. ■

Chú ý 13. *Có thể tính được* $\lim x_n = 1 - \frac{1}{a}$ *bằng sử dụng đánh giá*

$$1 - \frac{1}{a} - a\left((a-1)^9 - 1\right)\left(1-\frac{1}{a}\right)^{n+1} < x_n < 1 - \frac{1}{a}.$$

Hoặc sử dụng định lí Lagrange.

Ví dụ 2.17

(Bến Tre 2013) Cho phương trình: $x^{2n+1} = x + 1$ (1) (với $n \in \mathbb{N}*$).

1. Chứng minh rằng với mỗi giá trị nguyên dương n, phương trình (1) có đúng một nghiệm dương.

2. Xét dãy số (x_n) được xác định như sau$x_n$là nghiệm dương của: $x^{2n+1} = x + 1$. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Lời giải. Phương trình tương đương với $x(x^{2n} - 1) = 1$. Từ đây suy ra $x < 1$ không phải là nghiệm của phương trình.
Đặt $f(x) = x^{2n+1} - x - 1$. Ta có $f'(x) = (2n+1)x^{2n} - 1 > 0$ với mọi $x > 1$.

Lại có $f(1) = -1 < 0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất lớn hơn 1.
Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$x_n = \sqrt[2n+1]{x_n + 1} \leqslant \frac{2n + x_n + 1}{2n+1} \Leftrightarrow x_n \leqslant \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \Rightarrow 1 \leqslant x_n \leqslant 1 + \frac{1}{2n}.$$

Theo nguyên lí kẹp ta có $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$. ■

Ví dụ 2.18

(Ninh Bình 2013) Cho phương trình (ẩn x, tham số n nguyên dương)

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n - \frac{3}{4} = 0.$$

1. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n phương trình có 1 nghiệm dương duy nhất, kí hiệu nghiệm đó là x_n.
2. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$.

Lời giải. 1) Đặt

$$f_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n - \frac{3}{4}$$

liên tục trên toàn trục số. Ta có

$$f'(x) = 1 + 4x + 9x^2 + \ldots + n^2x^{n-1} > 0 \forall x \in (0; +\infty).$$

Ta suy ra $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Mặt khác $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và

$$f(0) = \frac{-3}{4} < 0, f(1) = \frac{1}{4} + 2 + 3 + \ldots + n > 0.$$

Từ đây ta suy ra $f(0).f(1) < 0$ Từ các điều kiện trên ta suy ra tồn tại duy nhất $x_n \in (0;+\infty)$ sao cho $f_n(x) = 0$ hay nói cách khác là $f_n(x)$ có nghiệm dương duy nhất x_n với mỗi n.
2) Ta dễ thấy x_n là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0. Thật vậy $x_n + 2x_n^2 + \ldots + nx_n^n = \frac{3}{4}$. Do x_n nguyên dương và $\frac{3}{4} < 1$ nên khi $n \to +\infty$ thì x_n giảm.
Vậy x_n tồn tại giới hạn hữu hạn.
Đặt $\lim x_n = L\ (0 \leqslant L < 1) \Rightarrow \lim x_n^n = 0$.
Từ công thức truy hồi ta có:

$$\begin{aligned}
& x_n + 2x_n^2 + \ldots + nx_n^n = \frac{3}{4} \\
& \Rightarrow x_n^2 + 2x_n^3 + \ldots + nx_n^{n+1} = \frac{3}{4}x_n \quad (x_n > 0) \\
& \Rightarrow x_n + x_n^2 + \ldots + x_n^n - nx_n^{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x_n \\
& \Rightarrow \frac{x_n(1 - x_n^n)}{1 - x_n} - \frac{n}{a^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x_n \quad (a > 1, x^{n+1} = \frac{1}{a^{n+1}}).
\end{aligned}$$

Vì với mọi $a > 1, n \in \mathbb{N}$ thì $\lim \dfrac{n}{a^n} = 0$ nên ta có

$$\frac{L}{1-L} = \frac{3}{4}(1-L) \Rightarrow L = \frac{1}{3} \quad (0 \leqslant L < 1).$$

Vậy $\lim x_n = \dfrac{1}{3}$. ■

Ví dụ 2.19

Cho $n > 1$ là một số nguyên dương. Chứng minh rằng phương trình $x^n = x+1$ có một nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là x_n. Chứng minh rằng $\lim x_n = 1$ và tìm $\lim n(x_n - 1)$.

Lời giải. Rõ ràng $x_n > 1\ \forall n$. Đặt $f_n(x) = x_n x 1$, khi đó $f_{n+1}(1) = -1 < 0$ và

$$f_{n+1}(x_n) = x_{n+1}^n x_n 1 > x_n^n x_n 1 = f_n(x_n) = 0.$$

Từ đó ta suy ra $1 < x_{n+1} < x_n$.
Suy ra dãy tồn tại $\lim x_n = a$. Ta chứng minh $a = 1$.
Thật vậy, giả sử $a > 1$. Khi đó $x_n \geqslant a\ \forall n$ và ta tìm được n đủ lớn sao cho: $x_n^n \geqslant a^n > 3$ và $x_n + 1 < 3$, mâu thuẫn ví $f_n(x_n) = 0$.
Để giải phần cuối của bài toán, ta đặt $x_n = 1 + y_n$ với $\lim y_n = 0$. Thay vào phương trình $f_n(x_n) = 0$, ta được

$$(1+y_n)^n = 2 + y_n.$$

Lấy logarith hai vế, ta được

$$n\ln(1+y_n) = \ln(2+y_n).$$

Từ đó suy ra :

$$\lim n\ln(1+y_n) = \ln 2$$

Nhưng

$$\lim \frac{\ln(1+y_n)}{y_n} = 1,$$

nên từ đây ta suy ra $\lim(ny_n) = \ln 2$, tức là : $\lim n(x_n - 1) = \ln 2$. ■

Ví dụ 2.20

(VMO 2002) Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng phương trình

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \ldots + \frac{1}{n^2x-1} = \frac{1}{2}$$

có một nghiệm duy nhất $x_n > 1$. Chứng minh rằng $\lim x_n = 4$.

Lời giải. Đặt

$$f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{n^2x-1} - \frac{1}{2}$$

và gọi $x_n > 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f_n(x) = 0$. Ta có

$$\begin{aligned} f_n(4) &= \frac{1}{4-1} + \frac{1}{16-1} + \dots + \frac{1}{4n^2-1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4n}. \end{aligned}$$

Áp dụng định lý Lagrange, ta có : $\frac{1}{4n} = |f_n(x_n) – f(4)| = |f'(c)||x_n - 4|$ với $c \in (x_n, 4)$ Nhưng do

$$|f_n{}'(c)| = \frac{1}{(c-1)^2} + \frac{4}{(4c-1)^2} + \dots > \frac{1}{9}.$$

Nên từ đây $|x_n – 4| < \frac{9}{4n}$, suy ra $\lim x_n = 4$.

■